

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

2 FIS 252
Fundamentos de Mecânica Clássica

Texto elaborado por Sergio de Mello Arruda
Digitação: Marcelo Alves de Carvalho

Londrina – PR, 14 de abril de 2011

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	
1.1 – Teorias, Conceitos e Leis	3
1.2 – Fundo das teorias físicas	3
1.3 – Formulação, representação e interpretação de uma teoria física	3
1.4 – Principais Formulações da Mecânica	4
2 – A FORMULAÇÃO NEWTONIANA	
2.1 – O problema geral da mecânica	6
2.2 – A formulação Newtoniana	6
2.3 – Vínculos	8
2.4 – Dificuldades introduzidas pelos vínculos	9
3 – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA	
3.1 – A solução da 2ª dificuldade. O princípio de D’Alembert.	11
3.2 – A solução da 1ª dificuldade. Coordenadas generalizadas.	12
3.3 – Equações de Lagrange na forma geral	13
3.4 – Equações de Lagrange para sistemas conservativos	16
3.5 – Observações	16
4 – A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA	
4.1 – Lei da conservação do momentum generalizado	20
4.2 – Lei da conservação da energia	20
4.3 – Equações de Hamilton	21
4.4 – A Formulação Hamiltoniana	23
5 – CÁLCULO DE VARIAÇÕES	
5.1 – Equações de Euler	27
5.2 – Domínios Variáveis	30
5.3 – Teorema de Nöether	33
6 – OS PRINCÍPIOS VARIACIONAIS NA MECÂNICA CLÁSSICA	
6.1 – Princípios Variacionais	37
6.2 – O princípio de Hamilton	38
6.3 – O Princípio de Hamilton modificado	38
6.4 – O princípio da mínima ação – evolução histórica.	39
6.5 – O princípio da mínima ação – formulação atual.	40
6.6 – Leis da conservação e simetrias	44
7 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E O MÉTODO DE HAMILTON-JACOBI	
7.1 – Transformações Canônicas	51
7.2 – Transformações de Legendre	52
7.3 – Função Geratriz	53
7.4 – Integração das equações de Hamilton. Método de Hamilton-Jacobi	56
8 – COLCHETES DE POISSON E TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS INFINITESIMAIS	
8.1 – Colchetes de Poisson	61
8.2 – Colchetes de Poisson e equações de Hamilton	63
8.3 – Transformações canônicas infinitesimais	63
9 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66

1 – INTRODUÇÃO

Antes de iniciarmos a apresentação e a análise das principais formulações da Mecânica Clássica é imprescindível que alguns termos frequentemente usados em Física sejam esclarecidos.

1.1 – TEORIAS, CONCEITOS E LEIS

A Física é um vasto empreendimento humano. É formada por vários sistemas ou agrupamentos de idéias chamadas teorias, às quais se procura dar uma organização lógica. Nesse curso, estamos assumindo a posição filosófica adotada por Mario Bunge em relação às teorias físicas, conforme descritas em **Foundations of Physics** (Bunge, 1967), a qual está resumida na citação abaixo:

Uma teoria, por exemplo, a mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, é um sistema hipotético-dedutivo, isto é, um conjunto de hipóteses ligadas pela relação de dedutibilidade ou entailment. Em uma teoria nenhuma fórmula está isolada: cada declaração é ou uma suposição básica (= axioma = postulado) ou uma consequência lógica das fórmulas previamente assumidas – a não ser que ela seja uma definição. O que é peculiar a uma teoria física é que ela contém suposições semânticas (hipóteses interpretativas) conferindo significado físico sobre seus símbolos básicos: teorias físicas são formalismos interpretados, isto é, formalismos com uma pretensa referência objetiva. Para uma teoria física ser científica e não especulativa ela tem de ser testável, além de possuir um formalismo ou uma estrutura razoavelmente correta e um conteúdo ou significado definido: ela deve ser capaz de casar (matching) com os dados empíricos e outras teorias que cobrem os campos adjacentes. Em resumo: uma teoria física científica é caracterizada por três traços característicos: formalismo matemático, significado físico e testabilidade. (Bunge, 1957: 51).

Dentro delas certas idéias, os conceitos, são da maior importância. Desempenhando o papel de tijolos eles permitem que os enunciados das teorias e suas principais hipóteses, as leis ou axiomas, sejam escritos.

Entende-se por lei física uma suposição mais ou menos geral acerca de certos processos da natureza, os quais se comportam de uma maneira regular e repetitiva dentro da realidade física em constante fluxo. As leis podem ser classificadas em princípios, postulados ou axiomas e leis empíricas. Vamos esclarecer tudo o que foi dito acima com alguns exemplos:

Exemplo de teorias: Mecânica de Partículas ou Mecânica Analítica, Eletromagnetismo Clássico, Teoria da Relatividade Especial e Geral, Teoria do Campo, Mecânica Quântica, etc.

Exemplo de conceitos: tempo, espaço, referencial, partícula, campo, potencial, trabalho virtual, etc.

Exemplo de leis e princípios: lei de Hooke, lei da queda dos corpos, leis de movimento, leis de força, princípio de Hamilton, etc.

1.2 – FUNDO DAS TEORIAS FÍSICAS

Toda teoria física é construída a partir de outras idéias e mesmo teorias, que constituem o seu fundo ou background. Se as teorias que formam o fundo são matemáticas ele é chamado formal (ex.: lógica, cálculo ou análise, geometria euclidiana, etc.). Se são filosóficas (semânticas e metafísicas), o fundo é chamado filosófico (ex.: idéias de significado, verdade, existência, etc.). Quando certas idéias que constituem o fundo, embora pertençam a quase todas as teorias físicas, não são investigadas por nenhuma delas em particular, o fundo é chamado protofísico (ex.: concepções de tempo, espaço e sistema).

1.3 – FORMULAÇÃO, REPRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE UMA TEORIA FÍSICA

Em toda teoria física pode-se distinguir três aspectos até certo ponto independentes: a formulação, a representação e a interpretação.

A formulação de uma teoria é o conjunto das proposições (sentenças e equações) por meio das quais ela é desenvolvida. A Mecânica, por exemplo, possui várias formulações. As que estudaremos serão: a de Newton, baseada no conceito de força; a de D'Alembert, idem; a de Lagrange, centrada no conceito de potencial cinético L ou lagrangeana; a de Hamilton, cujo conceito principal é a hamiltoniana H ; a de Hamilton-Jacobi, fundamentada na concepção de função principal S .

Essas diferentes formulações não são nem matemática nem fisicamente equivalentes, embora em relação aos mesmos dados conduzam aos mesmos resultados numéricos. (Bunge, 1957)

Cada conceito teórico é representado por um símbolo. Assim as formulações de uma teoria podem ser representadas dessa ou daquela maneira dependendo das características matemáticas do grupo de símbolos utilizado. Por exemplo, uma certa teoria formulada de uma maneira pode ser representada através de coordenadas cartesianas ou generalizadas.

A interpretação de uma teoria (formulada e representada de uma certa maneira) consiste de um conjunto de correspondências entre símbolos matemáticos e palavras de um lado e quantidades físicas de outro. (Bunge, ibid; sublinhado nosso).

Assim $\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$ não significa fisicamente nada se não se assume que \mathbf{F} é uma força impressa num corpo de massa \mathbf{m} cuja aceleração é \mathbf{a} .

Vamos a seguir colocar as principais características das formulações que iremos ver nesse curso.

1.4 – PRINCIPAIS FORMULAÇÕES DA MECÂNICA

a) Newton (Mecânica da Partícula)

fundo formal: lógica elementar, teoria de conjuntos, topologia elementar, teoria de espaços vetoriais, análise, fragmentos de álgebra e teoria dos números.

fundo protofísico: cronologia (teoria do tempo) universal, geometria euclidiana, teoria geral dos sistemas

axioma central: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (2ª Lei de Newton) e
 $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ (3ª Lei)
 Onde \mathbf{F} – força resultante sobre um sistema de partículas
 \mathbf{F}_{ij} – força que a partícula i faz na j
 \mathbf{p} = momentum total do sistema

alguns teoremas: - lei de conservação do momentum
 - lei do torque: $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{L}}$, onde
 \mathbf{T} torque resultante das forças impressas e
 $\dot{\mathbf{L}}$ = momento angular total do sistema.

b) D'Alembert

fundo formal: idem.

fundo profófico: Idem.

axioma central: $\sum (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{M}_i = 0$ onde i indica a partícula i, $\mathbf{F}_i^{(a)}$ a força resultante atuando sobre ela, \mathbf{p}_i o seu momentum linear e $\delta \mathbf{M}_i$ o deslocamento virtual em suas coordenadas.

c) Lagrange

fundo formal: lógica, álgebra, topologia, análise e teoria de conjuntos.

fundo profófico: teoria local do tempo, geometria multidimensional e teoria de sistemas.

axioma central: a integral $\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ é invariante à transformação
 $t \rightarrow t' = t + \delta t$, com $\delta t = \varepsilon \xi(1)$, onde
 ε = parâmetro infinitesimal e ξ arbitrária.
 q = coordenada generalizada.

alguns teoremas:
 - $\delta \int L dt = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$ que são as equações de Lagrange (equação de movimento)
 - leis da conservação
 - 2ª lei de Newton na forma generalizada.

d) Hamilton

fundo formal e profófico: idem Lagrange

axioma central:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ (equação de Hamilton)}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad p_i = \text{momentum generalizado}$$

e) Hamilton-Jacobi

fundo formal e profísico: idem Lagrange

axioma central:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial \delta}{\partial t}, t\right) = 0 \text{ (equação de Hamilton-Jacobi)}$$

Bibliografia e Referências

- BUNGE, M. Lagrangian Formulation and Mechanical Interpretation. Am. Journ. Phys 25,4, 211-218. 1957.
BUNGE, M. Foudations of Physics. Springer-Verlag, Berlim, N.York. 1967.
BUNGE, M. (1973). Filosofia da Física. Edições 70, Lisboa. 1973.

2 – A FORMULAÇÃO NEWTONIANA

A mecânica clássica é a união de três teorias: a mecânica do cotidiano (MC), a mecânica de partículas (MP) e a mecânica estatística (ME). Todas elas tratam com objetos dotados de localização e massa. MC trata da matéria conforme experienciada por nós; MP e ME supõe-na formada por pontos sem extensão ou partículas, interagindo umas com as outras através de forças gravitacionais, eletromagnéticas, etc., ou por meio de colisões. Nesse livro estudaremos o desenvolvimento formal da MP, a qual chamaremos apenas mecânica.

2.1 – O PROBLEMA GERAL DA MECÂNICA

A mecânica estuda o movimento dos sistemas¹ de partículas. A cada instante as partículas têm determinadas posições e velocidades, que definem o estado ou configuração do sistema, a qual pode ser especificada por parâmetros $p_1 \dots p_s$. O problema geral da mecânica é encontrar como se desenvolve temporalmente a configuração de um dado sistema, que matematicamente significa descobrir as s funções $p_i(t)$.

Esse problema pode a princípio ser resolvido se são conhecidas as leis ou equações de movimento, que são equações diferenciais relacionando os parâmetros p_i e suas derivadas \dot{p}_i e \ddot{p}_i , e as condições iniciais do movimento, dadas pelos valores iniciais dos \dot{p}_i e \ddot{p}_i . Se as duas exigências são preenchidas as funções $p_i(t)$, soluções do problema, podem ser obtidas por integração das equações de movimento.

2.2 – A FORMULAÇÃO NEWTONIANA

O primeiro método de resolução do problema mecânico foi proposto por Newton em 1687 no Principia e utilizado em mecânica celeste. Esse método se caracteriza por analisar separadamente as interações que cada elemento do sistema tem com sua vizinhança.

Se a posição de cada partícula do sistema é dada pelo vetor \mathbf{r}_i , a lei de movimento da mecânica newtoniana é escrita para cada partícula como:

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)}$$

onde \mathbf{F}_{ij} é a força que o elemento j faz na partícula i e $\mathbf{F}_i^{(e)}$ representa a resultante das forças externas atuando sobre i . Somando (2.1) de 1 a N , onde N = número de partículas do sistema, obtemos:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Assumindo válida a 3ª lei de Newton² ($\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$) a somatória dupla se anula, e se a massa é constante, obtemos:

$$(2.2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_i^{(e)} \quad i = 1 \dots N$$

Sendo que cada $\mathbf{F}_i^{(e)}$ é considerado como uma função que depende no caso geral da posição e velocidade da partícula $-i$ e talvez do tempo, ou seja:

$$(2.3) \quad \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$$

Portanto as equações (2.2) formam um sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem, cuja solução fornece os $\mathbf{r}_i(t)$ procurados. Vamos a alguns exemplos:

a) queda livre de uma partícula a partir do repouso:

$$i = 1 \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \mathbf{F}^{(e)} = mg$$

A equação (1.2) tornar-se para esse caso:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg, \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = g \quad \text{ou}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g \Rightarrow d\dot{y} = g dt, \quad \text{que se integrada de } 0 \text{ a } t,$$

$$\text{fornece:} \quad \dot{y} = gt \quad \text{ou} \quad dy = g dt$$

Integrando mais uma vez, obtemos

$$y = \frac{1}{2} gt^2, \quad \text{a solução do problema.}$$

b) movimento harmônico simples

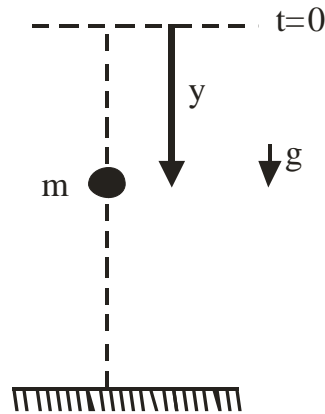


Figura 1 - queda livre de uma partícula a partir do repouso.

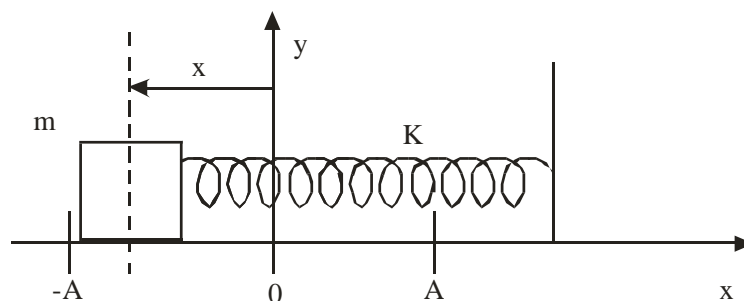


Figura 2 – Movimento harmônico simples.

O corpo de massa m oscila preso a uma mola de constante k em torno do ponto 0 . A amplitude do movimento é A ; a lei de força é dada pela lei de Hooke:

$$F = - kx$$

A equação de movimento do problema é:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Como $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{v}{v} = \frac{dv \cdot v}{dx}$, a equação acima fica:

$$m \cdot v \cdot dv = -k \cdot x \cdot dx$$

Integrando:

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} = E$, energia total do sistema. (como veremos a equação da energia é uma integral primeira da equação de movimento)

Sabemos que $E = \frac{1}{2}kA^2$. Portanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{ou}$$

$$mv^2 = k(A^2 - x^2) \quad \therefore$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{Então:}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt, \text{ que integrada fornece}$$

$$\arcsen \frac{x}{a} = \omega t + \theta_0, \quad \theta_0 = \text{constante}$$

Portanto: $x(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ que é a solução do problema.

2.3 – VÍNCULOS

Quando a forma funcional de \mathbf{F} é conhecida, a solução pelo método newtoniano é simples (surgem problemas nas integrações apenas). Porém frequentemente o movimento dos corpos está sujeito a vínculos, isto é, está limitado a certas condições devido a outros corpos que constituem a sua vizinhança. Por exemplo, o movimento das partículas de um gás está condicionado às paredes do recipiente que o contém; as partículas que compõem um corpo rígido têm suas posições relativas fixas o que limita suas possibilidades de movimento.

A limitação do movimento depende obviamente do tipo de vinculação do problema. Em geral os vínculos se classificam em:

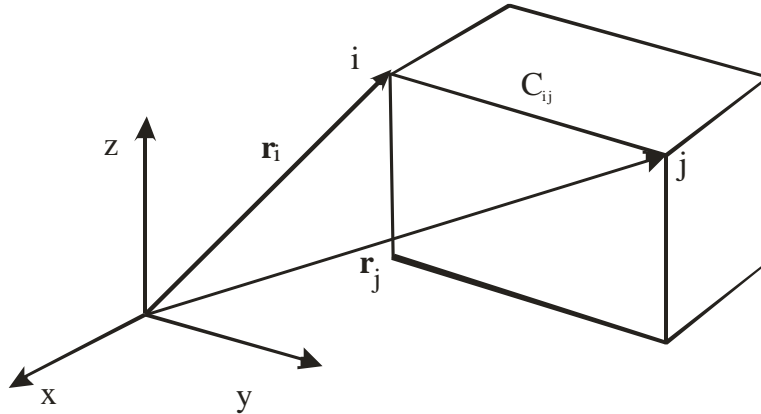
i) holônomos

Quando podem ser escritos em forma de equações conectando as coordenadas das partículas e talvez o tempo, do tipo:

$$(2.4) \quad f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

Para um corpo rígido, por exemplo, (1.4) fica:

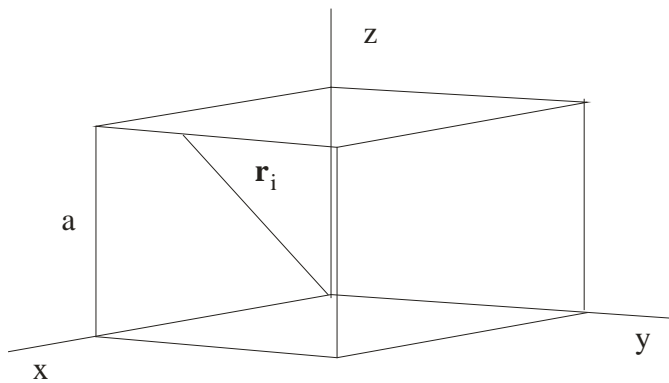
$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$



ii) não-holônomos

Quando a equação de conexão não pode ser expressa na forma (2.4), podendo ser uma desigualdade ou uma equação diferencial não integral. Para um gás numa caixa de aresta a ela teria a forma:

$$r_i^2 - 3a^2 \leq 0$$



iii) esclerônomos

Quando a equação de vinculação é independente do tempo.

iv) reônomos

Quando a equação de vinculação é dependente do tempo.

2.4 – DIFICULDADES INTRODUZIDAS PELOS VÍNCULOS

Os vínculos introduzem dois tipos de dificuldades na solução dos problemas mecânicos:

1º.) as coordenadas sendo conectadas (na melhor das hipóteses) por equações do tipo (2.4) não são independentes entre si, o que implica na dependência das equações diferenciais (2.2).

2º.) as forças de vinculação não são a princípio conhecidas, estando entre as incógnitas do problema.

Essas duas dificuldades impedem a resolução do problema mecânico via equação (2.2). Por esses e outros motivos outras formulações surgiam. Uma certa classe delas não fugiu muito dos princípios da mecânica newtoniana, usando ainda os conceitos de massa e força como centrais.

Desse tipo são as formulações de D'Alembert e Gauss (Lindsay e Margenan, p. 103-118).

Já Hertz, seguindo as idéias de Mach e Kirchhoff, buscava construir uma mecânica sem o conceito de força, que ele julgava obscuro. Seu método está colocado numa categoria à parte (Hertz, 1956; e Lindsay e Margenan, p. 118-120). As formulações mais produtivas foram, entretanto as de Lagrange, Hamilton e Hamilton-Jacobi. Também podem ser encontrados trabalhos mais recentes sobre formulações alternativas da mecânica (ver por exemplo: a mecânica generalizada de Martin, 1959; Bunge, 1967, p.113; e o trabalho de **Assis**

----- **VER**).

Bibliografia e Referências

Goldstein – “Classical Mechanics”

Lindsay e Margenan – “Foundations of Physics”

Bunge - “Foundations of Physics”

J. L. Martin – “Generalized Dynamics and the classical analogue of a Fermi oscillator” Proc. Roy. Soc. (London) A 251 , 536 (1959)

H. Hertz. “The Principles of Mechanics” (1894 – Dover, N.Y., 1956)

Notas

1. “Um sistema físico é qualquer coisa existente no espaço-tempo e tal que ou se comporta ou pode ser tratado como um todo em pelo menos um aspecto. Se dotado de massa, um sistema físico é chamado um corpo, uma partícula ou um quantum de matéria; do contrário, um campo ou um quantum de campo”. (Bunge, p. 108)

2. “Há alguns importantes sistemas nos quais as forças não seguem essa lei, notadamente as forças eletromagnéticas entre partículas em movimento”. (Goldstein, p.4. Ver também Curso de Física de Berkeley, vol 1, p. 53)

3 – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Vimos no capítulo anterior que os vínculos introduzem nos problemas mecânicos duas dificuldades:

1^a) as coordenadas são conectadas por equações do tipo:

$$(2.4) \quad f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

o que implica na dependência das equações de movimento de Newton.

2^a) as forças de vinculação não são conhecidas a priori.

Essas dificuldades foram resolvidas por D'Alembert e Lagrange.

3.1 – A SOLUÇÃO DA 2^A DIFICULDADE. O PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT.

O princípio de D'Alembert envolve os conceitos de deslocamento e trabalho virtuais.

Um deslocamento virtual é uma mudança na configuração do sistema através de variações infinitesimais arbitrárias (matemáticas ou hipotéticas), indicadas por $\delta \mathbf{r}_i$, nas coordenadas de suas partículas e que sejam compatíveis com as forças de vinculação, ou seja, respeitem os vínculos e as conexões a que o sistema está submetido. No caso de um corpo rígido, por exemplo, em que as partículas têm posições relativas constantes, um deslocamento virtual não deveria alterar essa disposição e poderia ser pequenas rotações ou deslocamentos no corpo como um todo.

Se a força resultante atuando sobre cada partícula do sistema é \mathbf{F}_i , chama-se trabalho virtual dessa força ao produto escalar

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Se o sistema está em equilíbrio então $\mathbf{F}_i = 0$, o que implica que $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$. Somando-se para todas as partículas do sistema obtém-se igualmente que:

$$(3.1) \quad \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Separando as forças \mathbf{F}_i em forças aplicadas $\mathbf{F}_i^{(a)}$ e forças de vinculação f_i , teríamos:

$$(3.2) \quad \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i f_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Sendo os deslocamentos virtuais compatíveis com as forças de vinculação a segunda soma se anula e (3.2) se reduz a:

$$(3.3) \quad \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

que é a expressão do princípio dos trabalhos virtuais, o qual vale somente para sistemas em equilíbrio. Observemos que sendo as forças aplicadas $\mathbf{F}_i^{(a)}$ em geral diferentes de zero, também o será cada termo da soma (3.3)

D'Alembert estendeu esse princípio à dinâmica através de um procedimento simples que revelou porém poderoso na resolução de problemas. Da 2ª lei de Newton para uma partícula:

$$(3.4 \text{ a}) \quad \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \quad \text{ou}$$

$$(3.4 \text{ b}) \quad \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$$

A última equação pode significar que a partícula está em equilíbrio sob a ação da força externa \mathbf{F}_i e da “força de inércia” $-\dot{\mathbf{p}}_i$. É como se a dinâmica fosse artificialmente reduzida à estática. Na verdade a passagem de (3.4 a) para 3.4 b) equivale à mudança de um referencial inercial acelerado, o da partícula. Como em (3.1) poderíamos escrever:

$$(3.5) \quad \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{ou} \\ \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i f_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

resultando como em (3.3) apenas:

$$(3.6) \quad \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

que é a expressão do princípio de D'Alembert. Esse princípio é na verdade uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais à dinâmica, podendo as equações de movimento serem deduzidas de considerações estáticas. Devemos lembrar que os deslocamentos $\delta \mathbf{r}_i$ são virtuais, isto é, matemáticos e não reais. Observemos também que embora (3.5) se anule identicamente, o mesmo não ocorre a (3.6), a não ser que o sistema não esteja vinculado. Portanto o princípio de D'Alembert se presta principalmente a sistemas vinculados. (obs.: deixaremos de usar daqui para frente o sobrescrito (a) nas forças aplicadas desde que as forças de vinculação não mais aparecerão nas equações).

O princípio expresso em (3.6) resolve, portanto a 2ª dificuldade do problema mecânico: as forças de vinculação não são conhecidas e nem precisam ser, pois não estão mais presentes nas equações de movimento. Ainda permanece, entretanto a 1ª das dificuldades: os $\delta \mathbf{r}_i$ não são independentes. Isso será resolvido pela introdução das coordenadas generalizadas.

3.2 – A SOLUÇÃO DA 1ª DIFICULDADE. COORDENADAS GENERALIZADAS.

O propósito das coordenadas é estabelecer uma correspondência entre cada ponto do espaço e um número, sendo o sistema cartesiano a maneira mais natural disso ser realizado. Outros métodos, como o das coordenadas polares ou cilíndricas, servem igualmente bem. A idéia das coordenadas generalizadas de Lagrange foi estender essa correspondência a quaisquer parâmetros que tipifiquem o estado de um sistema físico, seja ele mecânico ou não. Tais parâmetros são em número exatamente suficiente para descrever o estado do sistema, sendo portanto independentes entre si. A cada um deles faz-se corresponder uma variável q_i ,

chamada coordenada generalizada, tal que quando os q_i são conhecidos num dado instante o estado do sistema é dito conhecido nesse instante. Se são necessários n parâmetros para a especificação do estado do sistema, este é dito possuir n graus de liberdade, ou, do ponto de vista mecânico, o sistema possui n possibilidades diferentes de movimento. Pode-se tomar posições, ângulos, potenciais ou quaisquer outras grandezas físicas como coordenadas generalizadas.

A posição de uma partícula livre é determinada por um vetor \mathbf{r} , ou seja, por três números (x,y,z) , aos quais corresponderiam três coordenadas generalizadas q_1, q_2 e q_3 . Ela teria portanto 3 graus de liberdade ou a possibilidade de se mover nas três direções do espaço. Se a partícula tivesse que se mover num plano ou numa linha ela teria apenas 2 ou 1 grau de liberdade, respectivamente. Já um corpo rígido possui 6 graus de liberdade, que correspondem aos seus 6 movimentos possíveis (3 de translação e 3 de rotação). Um sistema de N partículas livres seria especificado por N vetores \mathbf{r}_i e teria a princípio $3N$ graus de liberdade. Se estivesse sujeito a vínculos holônomos expressos, digamos, por K equação do tipo (2.4), estas poderiam ser usadas para eliminar as coordenadas dependentes e os graus de liberdade seriam agora $3N-K$, ou seja, o estado do sistema poderia ser caracterizado por $3N-K$ coordenadas generalizadas q_j , relacionadas aos \mathbf{r}_i pelas equações abaixo:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-K}, t) \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N-K}, t) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-K}, t) \end{cases}$$

Quando os vínculos não são holônomos as equações de vinculações não podem ser usadas para eliminar as coordenadas dependentes. Em alguns casos as equações são equações diferenciais que não podem ser integradas antes da resolução do problema. Para esses casos elas devem ser introduzidas junto com as equações de movimento e as equações dependentes eliminadas por um método chamado dos multiplicadores de Lagrange. Não há entretanto um método geral para atacar os problemas com vinculação não-holônoma. Por isso normalmente se assume no desenvolvimento das aspectos mais formais da mecânica que os vínculos, se presentes, são todos holônomos.

Com a introdução das coordenadas generalizadas resolve-se portanto a 1ª das dificuldades. O que fez Lagrange a seguir foi escrever o princípio de D'Alembert em coordenadas generalizadas resolvendo com isso as duas principais dificuldades com que o método newtoniano se defrontava. As equações obtidas por ele, as equações de Lagrange, inauguram uma nova fase no desenvolvimento formal da mecânica.

3.3 – EQUAÇÕES DE LAGRANGE NA FORMA GERAL

O método de Lagrange vale para sistemas holônomos e para os casos não-holônomos quando as equações de vinculação são diferenciais. O aspecto central desse método é que suas equações de movimento, as equações de Lagrange, são escritas em coordenadas generalizadas o que faz que elas tenham a mesma forma qualquer que seja o referencial utilizado. As equações de Lagrange serão deduzidas aqui do princípio de D'Alembert e para isso devemos passar nossos símbolos da representação vetorial para a analítica, através das equações de transformação (3.7), onde cada \mathbf{r}_i é expresso em função dos q_j por:

$$(3.8) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots n \quad , \text{ onde } n = 3N-K$$

O que faremos a seguir é passar a expressão (3.6) para coordenadas generalizadas. Então, por (3.8) obtemos (ver nota sobre derivação parcial no final do capítulo):

$$(3.9) \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

Igualmente, obtemos para os deslocamentos virtuais:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

sendo $\delta t = 0$, pois não se assume variações virtuais no tempo, resultando para o trabalho virtual, equação (3.1):

$$(3.10) \quad \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

onde

$$(3.11) \quad Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

são as componentes das forças generalizadas. Notemos que nem os q_j precisam ter dimensões de comprimento, nem os Q_j de força, embora o produto $Q_j \cdot \delta q_j$ tenha sempre dimensão de energia. Lembremos também que os \mathbf{F}_i em (3.11) são os antigos $\mathbf{F}_i^{(a)}$.

Para o outro termo de (3.6):

$$(3.12) \quad \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Agora, observando que:

$$(3.13) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

e que; como em (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_i \partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

mostrando que $\frac{d}{dt}$ e $\frac{\partial}{\partial q_j}$ são intercambiáveis, e notando, além disso, de (3.6) que:

$$(3.14) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

encontramos que:

$$(3.15) \quad \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right]$$

Por outro lado, como:

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) = 2 \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right)$$

Obtemos:

$$(3.16) \quad \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$$

Identificando $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$ como a energia cinética total do sistema de partículas e substituindo (3.16) em (3.12) obtemos:

$$(3.17) \quad \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

e o princípio de D'Alembert tornar-se-á então, juntando (3.10) e (3.17):

$$(3.18) \quad \sum_j \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Sendo os vínculos holônimos os q_j são todos independentes, bem como os deslocamentos virtuais δq_j .

Portanto para que a soma (3.18) se anule cada termo entre chaves deve ser igual a zero, ou:

$$(3.19) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad j = 1 \dots n$$

que são as equações de Lagrange na forma geral, incluindo sistemas não-conservativos.

3.4 – EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS

Quando as forças são deriváveis de potenciais podemos escrever que:

$$(3.20) \quad \mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$$

onde V = função potencial. Então:

$$(3.21) \quad Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

(3.19) fica então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{ou}$$

$$(3.22) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad j = 1 \dots n$$

onde

$$(3.23) \quad L = T - V$$

é a função lagrangeana do sistema; também chamada de potencial cinético.

As equações (3.22) são as equações de Lagrange na forma mais conhecida, quando valem para sistemas conservativos.

3.5 – OBSERVAÇÕES

a) Principais características das equações de Lagrange:

“A invariância das equações de Lagrange com respeito a transformações de coordenadas arbitrárias é um de seus importantes aspectos. Ela torna possível ajustar o tipo de coordenadas empregado à natureza do problema. Não há nenhum método geral conhecido para sua resolução. O melhor que se pode fazer é encontrar um sistema de coordenadas no qual as equações são pelo menos parcialmente integráveis. Uma outra característica importante dessas equações é usarem uma simples função escalar L , a qual determina a dinâmica inteira do problema”. (Lanczos, p 117-118)

b) O método lagrangeano deve ser usado na resolução de problemas na seguinte ordem:

- 1^a) determinar T e V para o problema
- 2^a) escrever L
- 3^a) determinar as equações de movimento
- 4^a) resolver as equações

Notas

Sobre diferenciação parcial (Gillespie, Cap. II)

1. Seja uma função $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $x_i = x_i(+)$. Então:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

2. Se $u = f(t, x_1, x_2, \dots)$ e $x_i = x_i(+)$. Então:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

3. Se $u = f(x_1, x_2, \dots)$ e $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots)$. Então:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_j} + \dots = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt_j}$$

Bibliografia e Referências

Lanczos, C – “The Variational Principles of Mechanics”

Gillespie, R.P. – “Partial Differentiation” (Oliver and Boyd-Edinguih – 1951)

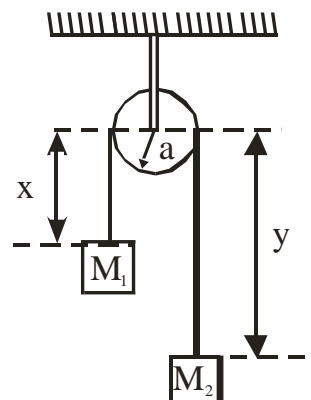
Problemas

1) Encontrar as equações de movimento pelos métodos de Newton, D’Alembert e Lagrange, para os seguintes casos:

a) Máquina de Atwood

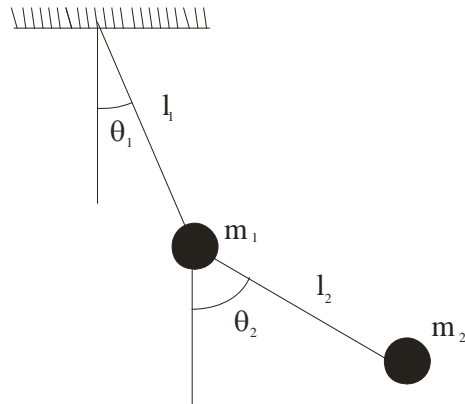
obs.: a corda que une M_1 e M_2 tem comprimento igual a l .

b) pêndulo simples.



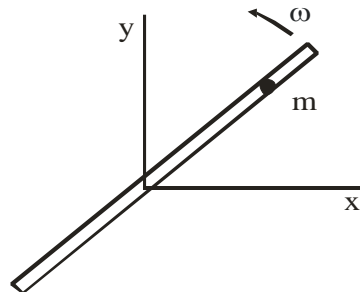
c) movimento harmônico simples.

2) Encontrar a lagrangeana e as equações de movimento para o pêndulo duplo.

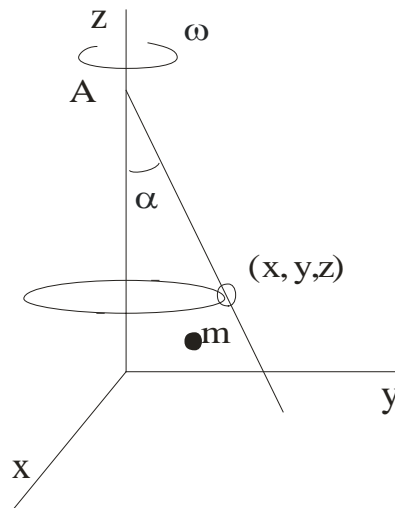


3) Mostre que em coordenadas generalizadas a expressão geral da energia cinética será $T = a + \sum_j a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$, onde os coeficientes a_j e $a_{j,k}$ são funções dos \mathbf{r}_i e t (e portanto dos q_j e t). Mostre também que se a vinculação for esclerônoma T é função quadrática das velocidades generalizadas.

4) Uma partícula de massa m é forçada a se mover dentro de um tubo oco fino sem atrito, que está girando com velocidade angular ω em um plano horizontal xy e em torno de um eixo vertical fixo em 0 . Encontre a lagrangeana e as equações de movimento.



5) Na figura abaixo, AB é um fio reto e sem atrito fixo no ponto A sobre um eixo vertical AO , tal que AB gira em torno de AO com velocidade angular ω constante. Uma conta de massa m é obrigada a se mover sobre o fio. Ache a lagrangeana e as equações de movimento em termos de r , ω , e α .



6) Uma partícula de massa m em um campo de força central tem potencial $V(r)$, onde r é a distância ao centro de força. Usando coordenadas esféricas ache o lagrangeano e determine as equações de movimento. Pode-se concluir dessas equações que o movimento ocorre em um plano?

7) Encontre a lagrangeana para o pêndulo triplo.

4 – A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

4.1 – LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM GENERALIZADO

Para um sistema de massas puntuais sujeitas às forças derivadas de potenciais dependentes das posições, somente a lagrangeana em coordenadas cartesianas seria:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

O valor da derivada parcial de L com respeito aos \dot{x}_i é:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{xi} = \text{momentum na direção x.}$$

Esse resultado sugere que em coordenadas generalizadas definamos o momentum generalizado como:

$$(4.1) \quad \boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$$

Observemos que p_j não tem necessariamente as dimensões de massa x velocidade, as quais dependem das dimensões dos q_j .

O momentum definido em (4.1), também chamado momentum canônico ou conjugado, é conservado quando a lagrangeana de um sistema não contém determinada coordenada q_j , sendo esta nesse caso chamada coordenada cíclica ou ignorável. Das equações de Lagrange (3.22):

$$(4.2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j, \text{ por (4.1)}$$

Portanto se q_j é cíclica $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ o que implica:

$$p_j = \text{constante}$$

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

$$(4.3) \quad \boxed{\text{O momentum generalizado conjugado a uma coordenada cíclica é conservado.}}$$

4.2 – LEI DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Consideremos um sistema conservativo com potencial $V(q)$, cujos vínculos são esclerônomos, tal que a lagrangeana não é função explícita do tempo. Portanto $L = L(q, \dot{q})$. Então:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} = 0$$

Por (4.2) e (4.1)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{dp_j}{dt} \dot{q}_j + \sum_j p_j \frac{d\dot{q}_j}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} (\dot{q}_j p_j)$$

e portanto:

$$(4.4) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\sum_j (\dot{p}_j \dot{q}_j - L) \right) = 0}$$

mostrando que a quantidade

$$(4.5) \quad \boxed{H = \sum_j \dot{p}_j \dot{q}_j - L}$$

chamada função hamiltoniana é uma constante de movimento.

Para sistemas em que $V = V(q)$

$$(4.6) \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{e então } \sum_j \dot{p}_j \dot{q}_j = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

Se a vinculação é esclerônoma vimos (problema nº 3, p. 29) que as equações de transformação (3.7) são independentes do tempo o que implicará ser T função quadrática dos \dot{q}_j . Nesse caso, pelo teorema de Euler (ver nota no final):

$$(4.7) \quad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

Portanto (4.5) ficará:

$$(4.8) \quad H = 2T - (T - V) = T + V$$

o que mostra que nesse caso ($V=V(q)$ e vinculação esclerônoma), a hamiltoniana é a energia mecânica total e (4.4) expressa a lei da conservação da energia.

4.3 – EQUAÇÕES DE HAMILTON

No caso geral a hamiltoniana definida em (4.5) será

$$(4.9) \quad H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t)$$

Ela será inicialmente uma função $h(q, \dot{q}, t)$. Como $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t)$, pela sua inversão obtemos os $\dot{q}_j(q, p, t)$ que substituídos em $h(q, \dot{q}, t)$ nos fornecem a verdadeira hamiltoniana $H(q, p, t)$. Vamos diferencia-la:

$$(4.10) \quad dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \text{que é igual a}$$

$$dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

que é a diferencial de (4.5), a qual pela definição (4.1) e por (4.2) se reduz a:

$$(4.11) \quad dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Comparando (4.10) e (4.11) obtemos:

$$(4.12) \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= - \frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}}$$

$$(4.13) \quad - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

As equações (4.12) são as equações canônicas de Hamilton, o conjunto de $2n$ equações de movimento de 1ª ordem. A primeira metade delas dá os \dot{q}_j em função dos (q, p, t) e são as inversas de (4.1).

Na obtenção da função hamiltoniana $H(q, p, t)$ deve-se geralmente seguir os passos indicados abaixo:

1. Obter a lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$
2. Obter os momenta $p(q, \dot{q}, t)$ por (4.1)
3. Formar uma hamiltoniana por (4.5). Nesse estágio ela é ainda uma função $h(q, \dot{q}, t)$ ou uma função misturada em q, \dot{q}, p e t .
4. Obter $\dot{q}(q, \dot{q}, t)$ por inversão de (4.1)
5. Substituir-se $\dot{q}(q, \dot{q}, t)$ em $h(q, \dot{q}, t)$ e obtém-se finalmente a função $H(q, p, t)$.

Quando a lagrangeana é independente do tempo e os potenciais são dependentes das coordenadas somente, a hamiltoniana é a energia total e pode ser obtida diretamente de (4.8)

4.4 – A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

Na formulação de Lagrange as equações de movimento são obtidas das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots n$$

que são n equações diferenciais de 2ª ordem. As principais variáveis e incógnitas do problema são os $q_j(t)$. A lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$ seria a função característica do sistema físico tratado. O espaço da mecânica lagrangeana é um espaço n-dimensional chamado espaço de configurações.

Na formulação hamiltoniana as principais equações são as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1 \dots n$$

as quais são 2n equações diferenciais de 1ª ordem. As principais variáveis são os q_j e os p_j , estes últimos considerados totalmente independentes dos primeiros. A função que caracterizaria o sistema estudado seria a Hamiltoniana $H(q, p, t)$. Todas as funções são aqui definidas num espaço 2n-dimensional chamado espaço das fases.

A formulação hamiltoniana embora não seja superior à de Lagrange na resolução de problemas mecânicos, permite através de sua estrutura extensões a muitas áreas da física. “Dentro da mecânica clássica ela forma a base para desenvolvimentos posteriores como a teoria de Hamilton-Jacobi e métodos de perturbação. Fora da mecânica clássica ela fornece muito da linguagem com a qual a mecânica estatística e a mecânica quântica atuais são construídas” (Goldstein, p 339)

Nota:

Teorema de Euler das funções homogêneas (Gillespie: “Partial Differentiation”)

Uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dita homogênea de grau-n nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n se:

$$(a) \quad f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\text{Ex.:} \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x+y}{x^4 + z^4}$$

O teorema diz então que

$$(b) \quad \sum_i^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$$

Prova:

Chamando

$$(c) \quad x_1 = \alpha_1 t, \quad x_2 = \alpha_2 t, \dots, \quad x_m = \alpha_m t$$

então:

$$(d) \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_m t) = t^n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (e)$$

e:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots \quad \text{por (d)}$$

e também:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n t^{n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad , \text{ por (e)}$$

Multiplicando as duas últimas expressões por t e igualando:

$$t \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + t \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots = n t f(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad , \text{ ou por (c) e (d) - (e):}$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots = n f(x_1, x_2, \dots) \quad , \text{ o que prova (b).}$$

Bibliografia e Referências

Goldstein, 1ª edição, "Classical Mechanics"

Problemas

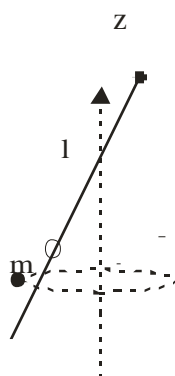
8) Encontre a hamiltoniana e as equações de movimento através das equações de Hamilton para os problemas 1, 2, 4, 5 e 6 das páginas 17 a 19.

9) Encontre a hamiltoniana para o pêndulo triplo.

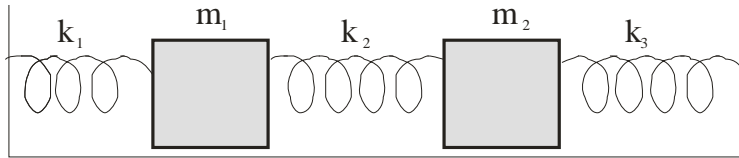
Problemas suplementares

10) Encontrar as equações de movimento e quando possível suas soluções, pelos métodos de Lagrange e Hamilton:

a) Pêndulo esférico:

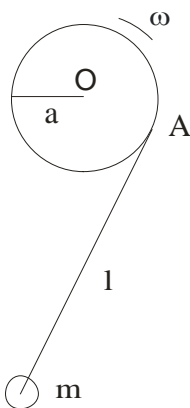


b) Sistema massa-mola:

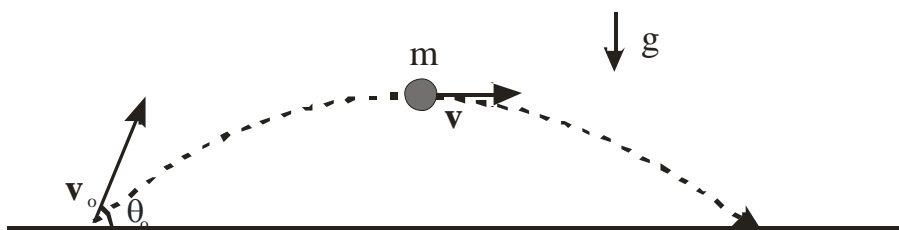


c) pêndulo plano cujo ponto de suspensão A gira numa circunferência vertical de raio

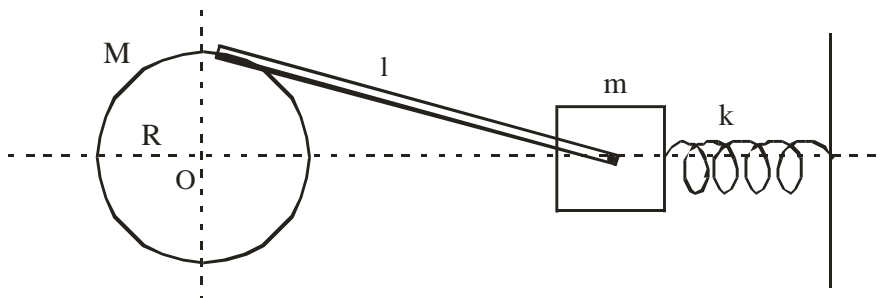
a:



d) movimento de um projétil.



e)



11) Mostre que as equações de Lagrange na forma geral

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Podem ser colocadas na forma de Xielsen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

5 – CÁLCULO DE VARIAÇÕES

O desenvolvimento formal da mecânica está estreitamente relacionado com a evolução de uma parte do cálculo chamada cálculo de variações (CV). (Essa relação está muito bem exposta no livro de Youngrow e Maldestam, 1968). O problema tratado pelo CV é o de encontrar a função que torna certa integrais definidas, chamadas funcionais, um extremo, isto é, um máximo ou um mínimo. Após a sua criação, atribuída usualmente a Newton (1642-1727), se desenvolvendo posteriormente nas mãos de Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Jacobi (1804-1851) e outros (Sobre a evolução histórica do CV ver Bliss, 1925). Alguns problemas clássicos do CV são:

- o problema da geodésica: qual é a menor distância entre dois pontos de uma dada superfície?

- o problema da braquistócrona: qual é a linha unindo dois pontos, ao longo da qual uma partícula caindo do repouso gasta o menor tempo possível?

- qual a linha fechada que envolve a menor área?

Para o estudo da técnica do CV a referência usual é o livro de Courant e Hilbert, 1953. Vamos agora a esse estudo.

5.1 – EQUAÇÕES DE EULER

O problema mais simples do CV é encontrar a função $y(x)$ que torna o funcional

$$(5.1) \quad J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

um extremo. $y(x)$ é uma função contínua e duas vezes diferenciável e $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. $J[y]$ sendo uma integral definida é então um número.

Para se resolver o problema usaremos o seguinte procedimento:

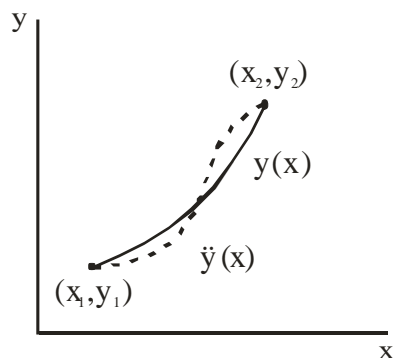
Consideramos a família de funções $y(x, \varepsilon)$, obtidas de $y(x)$ através da transformação abaixo:

$$(5.2) \quad \bar{y}(x) = y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$$

onde $\eta(x)$ é uma função arbitrária e de mesma classe que $y(x)$ e ε é um número de pequeno valor absoluto. O 2º termo do lado direito de (5.2) é chamado variação de $y(x)$ e indicado por:

$$(5.3) \quad \delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$$

Sendo ε um número de pequeno δy tem um pequeno valor e \bar{y} difere infinitesimalmente de y , como mostra o gráfico abaixo; onde não foram consideradas variações nos pontos terminais, ou seja:



$$(5.4) \quad \begin{aligned} y(x_1, \varepsilon) &= y(x_1) = y_1 \\ y(x_2, \varepsilon) &= y(x_2) = y_2 \end{aligned}$$

(Nem sempre, entretanto, esse é o caso).

Introduzindo as funções variadas $\bar{y}(x)$ em (5.1) obtemos o seguinte funcional:

$$(5.5) \quad J[\bar{y}] = J[y(x, \varepsilon)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)) dx$$

Observemos que $J[\bar{y}]$ se reduz a $J[y]$ para $\varepsilon = 0$, e tem portanto nessas condições um extremo (máximo ou mínimo).

Expandindo $J[\bar{y}]$ em série de Taylor (para ε) obtemos:

$$(5.6) \quad J[\bar{y}] = J[y] + \left. \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots$$

onde é costume chamar-se

$$(5.7) \quad \delta J = \left. \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon$$

de 1ª variação de J.

Para que $J[\bar{y}]$ tenha um máximo ou mínimo para $\varepsilon = 0$, a sua derivada primeira em relação a esse parâmetro deve se anular em $\varepsilon = 0$. Em outras palavras,

$$(5.8) \quad \delta J = 0$$

é a condição necessária para a extremização de (5.5).

Calculemos então $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}$. De (5.5):

$$\frac{\partial J[\bar{y}]}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)) dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\varepsilon} \right)$$

como, por (5.2),

$$(5.9) \quad \bar{y} = y' + \varepsilon \eta' = y' + \delta y'(x)$$

a integral acima se torna:

$$(5.10) \quad \frac{\partial J[\bar{y}]}{\partial \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx$$

O 2º membro da direita pode ser integrado por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

e portanto:

$$\frac{\partial J[\bar{y}]}{\partial \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por ε e seguindo as definições (5.3), (5.7) e (5.9), obtemos:

$$(5.11) \quad \boxed{\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2}}$$

que é a expressão da 1ª variação do funcional J.

Usualmente $\eta(x)$ está sujeita às seguintes restrições:

$$(5.12) \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \text{ por (5.3).}$$

equivalentes às (5.4). Portanto (5.8) fica:

$$(5.13) \quad \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0$$

Pelo lema fundamental do cálculo variacional (ver nota) obtemos que para a verificação de (5.13) torna-se necessária (e suficiente) a anulação da expressão entre parênteses:

$$(5.14) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

a equação acima é chamada equação de Euler.
Portanto:

$$(5.15) \quad \delta J = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Observação: A equação de Euler ainda continua válida mesmo se $\delta y|_{x_1}^{x_2} \neq 0$. Nesse caso y e \bar{y} não são coterminais, ou seja, (5.4) e (5.11) não se verificam e a expressão (5.11) não se reduz a (5.13). A justificativa para que (5.14) ainda valha é a seguinte: se $y(x)$ satisfaz (5.11), tornando $J[y]$ um extremo, ela satisfará também o caso menos geral em que $\eta(x)$ obedece (5.12), quando então se observa que $y(x)$ é solução da equação de Euler. Portanto em (5.11) a integral se anulará para $y(x)$ e para que toda a expressão seja zero deve-se ter também que

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

5.2 – DOMÍNIOS VARIÁVEIS

Consideremos agora o caso em que não só os $y(x)$ como também as variáveis independentes x estão sujeitos a variações. A 1ª variação de J conterà além dos termos usuais, um termo devido à variação do domínio de integração.

Suponhamos que as novas variáveis dependam das antigas segundo as equações de transformação abaixo:

$$(5.16a) \quad \bar{x} = x + \delta x$$

$$(5.16b) \quad \bar{y}(\bar{x}) = y(x) + \bar{\delta} y(x)$$

onde, como é usual,

$$(5.17) \quad \delta x = \varepsilon \xi(x)$$

e com $\bar{\delta} \neq \delta$.

O funcional variado será:

$$(5.18) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x})) d\bar{x}$$

Usando as equações (5.16) e considerando que

$$(5.19) \quad d\bar{x} = \left(1 + \frac{d}{dx}(\delta x) \right) dx$$

obtemos:

$$(5.20) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = \int_{x_1}^{x_2} f(x + \delta x, y + \bar{\delta}y, y' + \bar{\delta}y') \left(1 + \frac{d}{dx}(\delta x) \right) dx$$

(observe que após a transformação o domínio de integração retorna ao usual)

Vamos expandir a função de f de (5.20) em série:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} f(x + \delta x, y + \bar{\delta}y, y' + \bar{\delta}y') &= f(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{\delta}y + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y'} \bar{\delta}y' + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \end{aligned}$$

pois $\delta x, \bar{\delta}y, \bar{\delta}y'$ são em 1ª ordem em ε .

Substituindo a expressão acima em (5.20), e agrupando os termos em ordem superior à 1ª em ε , inclusive os produtos do tipo $\delta x \cdot \frac{d}{dx}(\delta x)$, etc, obtemos:

$$(5.22) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{\delta}y + \frac{\partial f}{\partial y'} \bar{\delta}y' + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + f \frac{\partial}{\partial x}(\delta x) \right) dx + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

Devemos agora eliminar os $\bar{\delta}$ da expressão acima. Para isso vamos expandir os $\bar{y}(\bar{x})$:

$$(5.23) \quad \bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}(x + \delta x) = \bar{y}(x) + \bar{y}'(x)\delta x + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

Mas de (5.2) e (5.3)

$$(5.24) \quad \bar{y}(x) = y(x) + \delta y$$

e portanto:

$$(5.25) \quad \bar{y}(\bar{x}) = y(x) + \delta y + \bar{y}'\delta x + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

que comparado com (5.16 b) fornece:

$$(5.26) \quad \bar{\delta}y = \delta y + y'\delta x + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

Analogamente pode-se obter que:

$$(5.27) \quad \bar{\delta}y' = \delta y' + y''\delta x + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

Substituindo (5.26) e (5.27) em (5.22) obteremos:

$$J[\bar{y}(\bar{x})] = \int_{x_1}^{x_2} f dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y' + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'' \right) dx + f \frac{d}{dx} (\delta x) \right] dx + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

ou, ainda, observando que $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$ e por (5.1):

$$(5.28) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = J[y] + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (f \delta x) dx + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

onde o 2º e 3º termos da direita são em 2ª ordem em ε e devem se anular para a função $y(x)$ estacionária, isto é, para $\varepsilon = 0$. Temos também que:

$$(5.29) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = \delta J$$

por (5.10).

E também:

$$(5.30) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (f \delta x) dx = f \delta x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Então (5.28) fica:

$$(5.31) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = J[y] + \delta J + f \delta x \Big|_{x_1}^{x_2} + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

Para a extremização desse funcional os 1ºs termos em ε devem se anular. Definindo então a 1ª variação $\bar{\delta} J$ por:

$$(5.32) \quad \boxed{\bar{\delta} J = \delta J + f \delta x \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + f \delta x \Big|_{x_1}^{x_2}}$$

têm-se que:

$$(5.33) \quad J[\bar{y}(\bar{x})] = J[y] + \bar{\delta} J + \text{termos em } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$$

sendo que:

$$(5.34) \quad \delta J = 0$$

quando $\varepsilon = 0$.

5.3 – TEOREMA DE NÖETHER

Suponhamos que o valor de $J[y]$ permanece inalterado às transformações (5.16), tal que:

$$(5.35) \quad J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} f(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')d\bar{x} = J[\bar{y}(\bar{x})]$$

Se $y(x)$ é a função que extremiza $J[y]$ sabemos que

$$(5.36) \quad \delta J = \bar{\delta}J = 0$$

quando $\varepsilon = 0$.

De (5.32):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y + f \delta x \right) dx = 0$$

e como as equações de Euler se anulam, obtemos

$$(5.37) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y + f \delta x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

ou seja, a expressão entre parênteses é constante:

$$(5.38) \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y + f \delta x = \text{constante}}$$

O resultado (5.38) é consequência da invariança de $J[y]$ às transformações (5.16). Em Física esse teorema relaciona simetrias e leis de conservação, como veremos adiante.

Nota:

Lema fundamental do Cálculo Variacional

$$\text{Se } \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\varphi(x)dx = 0$$

com $\eta(x)$ contínua e duplamente diferenciável e obedecendo a $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, e com $\varphi(x)$ contínua, segue que $\varphi(x) \equiv 0$ no intervalo de integração.

Prova:

Suponhamos $\varphi(x) \neq 0$, digamos positiva num ponto a qualquer, com $x_1 < a < x_2$. Então existe uma vizinhança G qualquer de a , tal que $a_1 \leq a \leq a_2$, em que $\varphi(x) > 0$. Sendo $\eta(x)$ arbitrária podemos tomar para ela um valor tal que $\eta(x) > 0$ em G . Então:

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\eta(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\eta(x) > 0$$

o que contraria a hipótese. Portanto $\varphi(x)$ não pode ser maior que zero. Por igual motivo não será também menor que zero. Logo se anula identicamente no intervalo requerido.

Bibliografia e Referências

Courant e Hilbert (1953) – “Methods of Mathematical Physics” – (Juterscience – N.Y.)

Bliss, G.A. (1925) – “Calculus of Variations” – Carus Mathematical Monographs – Vol.1 (Open Court Publis. Co. – La Salle Jllinois)

Problemas

12) Provar que $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$

13) Mostrar que a menor distância entre dois pontos (geodésica) num plano é uma reta. Obs.: o problema é calcular a curva $y(x)$ que torna o funcional $I = \int ds$ um mínimo, sendo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e $y = y(x)$. Deve-se obter as equações de Euler e delas as funções y .

14) Mostrar que a geodésica numa esfera é um grande círculo, isto é, um círculo cujo centro está no centro da esfera.

15) Encontrar as equações de Euler para os seguintes funcionais:

(a) $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,u,v,u',v')dx$ com $u = u(x)$ e $v = v(x)$

(b) $J = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} f(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$ com $u = u(x,y)$ e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

16) Mostre que funções do tipo $\bar{f}(x,y,y') = f(x,y,y') + \frac{d}{dx}g(x,y)$, onde $g(x,y)$ é contínua e diferenciável, levam às mesmas equações de Euler (5.14). Isto significa que a cada equação de Euler correspondem infinitos funcionais do tipo (5.1) cujas variações são zero.

Adendo

A operação δ

A função variada $\bar{y}(x)$ foi definida (p. 27) por:

$$\bar{y}(x) = y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon \eta(x) = y(x) + \delta y$$

de onde se obtém que

$$(5.39) \quad \eta(x) = \frac{\partial \bar{y}(x)}{\partial \varepsilon}$$

e também que

$$(5.40) \quad \delta y = \frac{\partial \bar{y}(x)}{\partial \varepsilon} \cdot \varepsilon$$

Por outro lado, lembrando que a diferencial de $y(x)$ é

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

isto sugere, visto que dx como ε é um número de pequeno valor absoluto, tratarmos δy (operacionalmente) como uma diferencial. Assim definiríamos a variação δg de uma função $g = g(y_1 \dots y_n)$, com $y_i = y_i(x)$ por:

$$(5.41) \quad \delta g = \frac{\partial g}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \delta y_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n} \delta y_n = \sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} \delta y_i$$

Assim sendo a variação δJ seria dada por:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx \quad (\text{onde não se considera variações no domínio})$$

$$(5.42) \quad \delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

Observando que $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$ (exercício 12) e por uma integração por partes obtemos a expressão de δJ , equação (5.11).

6 – OS PRINCÍPIOS VARIACIONAIS NA MECÂNICA CLÁSSICA

6.1 – PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

No capítulo anterior estudamos a variação da integral

$$(5.1) \quad J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$$

chamada funcional. Observamos que quando a 1ª variação de (5.1) é zero ($\delta J = 0$) obtemos como consequência as equações de Euler:

$$(5.14) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Quando a função de f de (5.1) é interpretada fisicamente como a lagrangeana de um sistema mecânico, o que implica também em considerarmos de como o tempo t e $y(x)$ como as coordenadas generalizadas $q(t)$, a integral funcional toma a forma abaixo

$$(6.1) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})dt$$

sendo então chamada ação. Lembremos que para um sistema de n graus de liberdade o símbolo q corresponde às n coordenadas q_1, q_2, \dots, q_n , o mesmo valendo para \dot{q} . Impondo que a 1ª variação de S seja igual a zero é possível então obtermos as equações de Lagrange (3.22):

$$(3.22) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots n$$

Assim, um princípio variacional ou princípio de ação é uma declaração da forma “ $\delta J = 0$ ”, onde δJ indica a 1ª variação do funcional S referente a um sistema físico, tal que:

- (i) S é a integral definida dada por (6.1)
- (ii) $\delta q_j = 0$ nos limites de integração
- (iii) $\delta S = 0$ acarreta leis físicas, ou seja, equações de movimento ou equações de campo (equação. 3.22)
(Ver M. Bunge, 1967, p.46)

As vantagens de se construir princípios variacionais são:

1. ele condensa numa simples fórmula as declarações centrais de uma teoria.
2. ajuda a encontrar as equações de movimento (ou equação de campo) quando estas não são consideradas.

3. transmite suas propriedades de invariância à sua “descendência” (equação de Euler-Lagrange).
4. pelo teorema de Noether ele acarreta também leis de conservação.

Observações:

- (a) os princípios variacionais embora muitas vezes matematicamente equivalentes às equações de movimento (ou de campo) não são idênticos a elas. Dado um conjunto de equações de Euler-Lagrange pode-se construir infinitos princípios variacionais, o que mostra serem eles mais gerais que elas.
- (b) na mecânica, o princípio variacional que permite obter as equações de movimento é chamado princípio de Hamilton.

6.2 – O PRINCÍPIO DE HAMILTON

Consideremos um sistema físico cujas propriedades são descritas pela lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$, com q e \dot{q} representando as n coordenadas e velocidades generalizadas.

O princípio de Hamilton estabelece que:

O movimento do sistema entre os instantes t_1 e t_2 é tal que a ação

$$(6.2a) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

com $L = T - V$, é um extremo para a trajetória do movimento.

A trajetória referida acima não é a trajetória real do movimento no espaço físico, mas uma trajetória no espaço das configurações. Um ponto nesse espaço é um conjunto de n números ($q_1 \dots q_n$) que caracterizam num dado instante o estado (ou configuração) do sistema. Uma trajetória nesse espaço corresponde a evolução temporal da configuração, ou seja, uma seqüência de estados que o sistema ocupa sucessivamente desde t_1 a t_2 , a qual é representada por $q(t)$ ou $q_1(t) \dots q_n(t)$, que são as soluções das equações de Lagrange (3.22) e portanto as funções que extremizam o funcional (6.1). Em outras palavras, (6.2) diz que:

$$(6.2b) \quad \delta S = \delta \int L dt = 0$$

para a trajetória verdadeira, considerada no espaço das configurações.

6.3 – O PRINCÍPIO DE HAMILTON MODIFICADO

Através da substituição de L por $\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$ na ação obtemos o princípio de Hamilton modificado:

$$(6.3) \quad \delta \sum_j \int_{t_1}^{t_2} (p_j \dot{q}_j - H(q, p, t)) dt = 0$$

pelo qual as equações de Hamilton são obtidas. Desenvolvendo a operação δ de (6.3):

$$\delta \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0$$

como $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$ e $\frac{d}{dt} (p_j \delta q_j) = \dot{p}_j \delta q_j + p_j \frac{d}{dt} \delta q_j$, teremos:

$$\sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j dt + \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt + p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Como q_j e p_j são independentes e como $\delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ obtemos as equações canônicas:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

6.4 – O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO – EVOLUÇÃO HISTÓRICA.

Em 1744 Mampertuis enunciou na Academia de Ciências em Paris o seu Princípio da Mínima Ação. Baseado na hipótese de que “a natureza, na produção de seus efeitos, age sempre pelos meios mais simples” ele assim estabelece o princípio:

- (6.4) “Sempre que qualquer mudança ocorre na natureza, a quantidade de ação dispendida na mudança é sempre a menor possível”.

onde a ação foi definida por ele pelo produto:

$$\text{ação} = m.v.s. \quad \text{obs: } m = \text{massa, } v = \text{velocidade, } s = \text{espaço}$$

Mampertuis esforça-se por provar que, entre outras leis, a lei da conservação do momentum, a lei da refração da luz e a lei da alavanca eram conseqüências de seu princípio. Ele buscava, possivelmente inspirado nas idéias de Leibniz (embora negasse isso veementemente), um único princípio verificador que explicasse todos os processos naturais. Como ele desconhecia o cálculo variacional não pode dar ao seu princípio uma formulação matemática exata, o que foi feito por Euler também em 1744.

Num adendo à sua principal obra Euler assim formula o seu “teorema dinâmico”:

- (6.5) “Quando uma partícula viaja entre dois pontos fixos ela toma aquela trajetória para a qual a integral $\int mvds$, ou sendo m constante, $\int vds$ é um mínimo”.

Ela coloca também que seu teorema só é aplicável quando a velocidade da partícula depende apenas da posição do elemento ds , ou seja, quando vale o princípio da conservação da energia mecânica.

Embora Euler mantivesse que seu teorema era válido também para o caso de várias partículas a prova disso foi dada somente por Lagrange. O enunciado deste é mais ou menos o seguinte:

(6.6) “Consideremos um sistema de corpos de massa “M,M',M" ... que agem uns sobre os outros de maneira qualquer [através] de forças centrais... funções das distâncias. Se S,S',S" ... denotam os espaços percorridos pelos corpos no tempo t e v, v',v" ... são as velocidades no fim desse tempo, a formula

$$M \int v ds + M' \int v' ds' + M'' \int v'' ds'' + \dots$$

é sempre um máximo ou um mínimo”.

A prova de Lagrange do enunciado (6.6) consiste em mostrar a equivalência entre o seu princípio de mínima ação juntamente com a lei da conservação da energia e as equações de Newton.

Até Lagrange o princípio em questão depende em sua formulação da lei da conservação de energia. Nada de novo resulta da sua aplicação, ou como escreve Hamilton:

“... quando a lei da menor ação é aplicada para a determinação do movimento real do sistema ela serve somente para formar, pelas regras do cálculo de variações, as equações diferenciais de movimento que podem sempre ser achadas de outra maneira. Parece portanto razoável que Lagrange, Laplace, Poisson e outro tivessem falado apenas ligeiramente da utilidade desse princípio dentro do atual estado da dinâmica”.

Com os trabalhos de Hamilton, porém, o princípio conseguiu se tornar independente da lei da conservação da energia o que permitiu a sua extensão para além da mecânica. “Com as investigações de Thomson e Tait, Kirchhoff, Neumann e outros ele provou ser um excelente método para resolver problemas em hidrodinâmica e elasticidade. Larmor em 1900 e Schwarzschild em 1903, derivaram as equações fundamentais da eletrodinâmica do princípio de Hamilton”. (Planck, A survey of Physical Theory).

A aplicação dos princípios variacionais se estende atualmente pela física toda. Não se deve, porém tomá-los por leis universais unificadoras (como suponha Planck), pois eles não são princípios físicos propriamente ditos, mas ferramentas matemáticas extremamente úteis. O princípio de Hamilton, por exemplo, só se torna um princípio físico quando a lagrangeana é interpretada fisicamente como T - V no caso mecânico ou de um modo geral, como uma função que caracteriza um certo sistema físico.

6.5 – O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO – FORMULAÇÃO ATUAL.

A ação para um sistema de N partículas foi definida por Lagrange como:

$$A = \sum_i^N \int_1^2 m_i v_i \cdot ds_i = \sum_i^N \sum_{xyz} \int_1^2 m_i x_i \cdot dx_i$$

que em coordenadas generalizadas corresponderia a

$$(6.7) \quad A = \sum_{i=1}^N \int_1^2 p_i dq_i = \sum_i^N \int_1^2 p_i \dot{q}_i dt$$

O princípio da mínima ação diz então que a variação de A, dada por (6.7) é nula para a trajetória do sistema, onde é assumida a conservação da energia. Tal variação exigindo essa

lei torna-se diferente da variação envolvida no princípio de Hamilton, equação (6.2b). Lá, a variação é do tipo δ , isto é, não considera variações no domínio, enquanto que na variação do princípio da mínima ação é do tipo $\bar{\delta}$, na qual $\delta t \neq 0$ nos extremos da integração. Em outras palavras, no princípio de Hamilton as variações δ são virtuais, nem sempre coincidindo com possíveis deslocamentos reais ocorrendo no curso do movimento e as trajetórias variadas seriam em geral imaginárias.

No processo $\bar{\delta}$, entretanto exige-se que nas trajetórias variadas a conservação da energia valha o que torna essas trajetórias reais e ocorrendo no tempo. Em resumo:

No princípio de Hamilton:

$$(6.8) \quad \delta S = 0 \text{ com } \delta t = 0, \quad \delta q_i|_{t_1}^{t_2} = 0$$

No princípio da mínima ação:

$$(6.9) \quad \bar{\delta} A = 0, \text{ com } \delta t|_{t_1}^{t_2} \neq 0, \quad \bar{\delta} q_i|_{t_1}^{t_2} = 0 \text{ e em geral } \delta q_i|_{t_1}^{t_2} \neq 0$$

onde $\bar{\delta} q_i$ é dado, como em (5.26) por:

$$(6.10) \quad \bar{\delta} q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \delta t$$

Vamos mostrar agora que efetivamente $\bar{\delta} A = 0$ para a trajetória do movimento.

Como $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$, a expressão (6.7) fica:

$$A = \sum \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + E(t_2 - t_1)$$

pois $H = E = \text{energia} = \text{constante}$

Então:

$$(6.11) \quad \bar{\delta} A = \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} L dt + \bar{\delta} E(t_2 - t_1) = \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} L dt + E \bar{\delta} t|_{t_1}^{t_2}$$

pois $E \bar{\delta} t = 0$

Agora, como em (5.32),

$$(6.12) \quad \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L \delta t|_{t_1}^{t_2}$$

e portanto,

$$\bar{\delta} A = \int_{t_1}^{t_2} L dt + (E + L) \delta t|_{t_1}^{t_2}$$

Como $E + L = T + V + T - V = 2T$, obtemos

$$(6.13) \quad \delta A = \int_{t_1}^{t_2} L dt + 2T \delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Avaliemos agora o termo na integral que não deve ser confundido com o princípio de Hamilton pois δq_i não se anula nos pontos extremos. Vejamos:

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Assumindo válida as equações de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, a expressão acima fica:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt$$

pois $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (\delta q_i)$ (exercício 12, pagina 34)

Então:

$$(6.14) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

E por (6.9), (6.10) e da definição de p_i :

$$(6.15) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \sum_i p_i \dot{q}_i \delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

que substituída em (6.13) fornece:

$$(6.16) \quad \delta A = (2T - \sum_i \dot{q}_i p_i) \delta t \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Assumindo que os potenciais são da forma $V = V(q)$ e pelo teorema de Euler, obtemos como em (4.6) e (4.7):

$$(6.17) \quad \sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

e portanto (6.16) se anula, o que prova o princípio da mínima ação. Observamos entretanto que pelo menos duas suposições foram feitas para que $\delta A = 0$. Primeiro a validade das equações de Lagrange. Segundo a hipótese que $V = V(q)$, ou seja, as forças são conservativas e vale da lei da conservação da energia. Essa é a razão da colocação de Hamilton, citada no na

página 40. O princípio de Hamilton ao contrário não necessita dessas suposições para a sua validade o que o torna então superior ao princípio da mínima ação.

Para finalizar essa parte vamos ver as relações entre o princípio da mínima ação e outros princípios variacionais de física.

Por (6.17) a ação (6.7) fica:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt$$

e portanto

$$(6.18a) \quad \bar{\delta}A = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$$

ou ainda,

$$(6.18b) \quad \bar{\delta}A = \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$$

Se não há forças atuando no sistema T é constante, o que implica que:

$$(6.19) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt = \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

que é a expressão do princípio do tempo mínimo de Fermat, usado na ótica para exprimir que a luz se propaga entre dois pontos pela trajetória em que o tempo gasto é o menor possível.

Se substituirmos $dt = \frac{ds}{v}$ na expressão anterior obteremos o princípio do menor caminho:

$$(6.20) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{v} = 0$$

equivalente ao princípio de Fermat.

Se T é quadrática nos q_i ,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \frac{dq_i dq_k}{dt^2}$$

Definindo o elemento de linha (reimanniano)

$$(6.21) \quad (dp)^2 = \sum m_{ik} dq_i dq_k$$

T fica

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad \text{que em (6.18b) fornece:}$$

$$\bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{T} dp = 0 \quad \text{ou}$$

$$(6.22) \quad \bar{\delta} \int \sqrt{H - V(q)} dp = 0$$

que é a forma de Jacobi do princípio da mínima ação. dp é interpretado como a distância entre dois pontos no espaço das configurações, sendo os m_{ik} tensores métricos. Podemos ainda definir o elemento de linha:

$$(6.23) \quad d\sigma = \sqrt{H - V(q)} dp$$

e ficamos com:

$$(6.24) \quad \bar{\delta} \int d\sigma = 0$$

que permite encontrar a equação da geodésica no espaço definido por (6.23) (ver problema 13, pág. 34), e que é equivalente a encontrar a solução de um problema mecânico conservativo.

6.6 – LEIS DA CONSERVAÇÃO E SIMETRIAS

Embora grande parte dos problemas mecânicos não seja completamente integrável é possível extrair informações importantes sobre o sistema considerado se um certo número de integrais primeiras podem ser obtidas. As integrais primeiras, também chamadas invariantes, são relações do tipo:

$$(6.25) \quad f(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) = \text{constante}$$

Algumas delas são leis de conservação, como as leis de conservação do momentum linear e angular e a lei da conservação da energia. Tais leis têm origem muito profunda, estando conectadas com as simetrias do sistema físico.

Diz-se que um sistema físico é simétrico em relação a uma determinada operação se ele não muda suas características ou suas propriedades quando tal operação é realizada sobre ele. Em geral essa operação pode ser representada através de uma transformação de coordenadas. Exemplo: a operação de transladar ou rodar o sistema no espaço pode ser representada por uma transformação do tipo:

$$(6.26a) \quad \bar{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i \quad i = 1 \dots n$$

onde os $q_i(t)$ e $\bar{q}_i(t)$ são as antigas e novas coordenadas generalizadas e os δq_i representam pequenas translações e/ou rotações. Já deslocamentos no tempo poderiam ser representados por transformações do tipo:

$$(6.26b) \bar{t} = t + \delta t$$

Como as propriedades de um sistema são descritas pela sua lagrangeana L (ou pela hamiltoniana H), a simetria do sistema em relação a determinada transformação T corresponderá à invariância da lagrangeana sob essa transformação. Em relação aos exemplos (6.26a) e (6.26b) isso implicaria respectivamente que:

$$(6.27a) L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{\bar{q}}, t)$$

e

$$(6.27b) L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, \bar{t})$$

Se suas transformações (6.26) fossem realizadas simultaneamente, teríamos a transformação geral dada por:

$$(6.28a) \begin{cases} \bar{q}_i(\bar{t}) = q_i(t) + \delta q_i \\ \bar{t} = t + \delta t \end{cases}$$

e se o sistema fosse agora simétrico a ela, teríamos a invariância de L :

$$(6.28b) L = L(q(t), \dot{q}(t), t) = L(\bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t}), \bar{t}) = \bar{t}$$

Vamos mostrar agora que através do teorema de Nöether (seção 5.3) a invariância expressa em (6.28b) conduz às leis da conservação do momentum linear e angular e da energia.

Para um sistema descrito pela lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$ satisfazendo o princípio de Hamilton e invariante às transformações (6.28a), tem-se:

$$(6.29) \int L dt = \int \bar{L} d\bar{t}$$

e também:

$$(6.30) \delta \int L dt = \delta \int \bar{L} d\bar{t} = 0$$

Como as transformações (6.28a) são idênticas às transformações (5.16) do capítulo 5, por (6.30) concluímos, via teorema de Nöether que as seguintes expressões serão conservadas:

$$(6.31) \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + L \delta t = \text{constante}} \quad i = 1 \dots n$$

Exemplos:

a) Consideremos $\delta q_i = \varepsilon$, $\delta t = 0$, que corresponde a pequenas translações ou rotações na coordenada q_i . Então, por (6.31):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \varepsilon = \text{constante} \Rightarrow p_i = \text{constante}$$

ou seja, o momentum generalizado é conservado. Assim se q_i é coordenada linear, p_i será o momento linear. Se q_i é coordenada angular, p_i será o momento angular.

b) para $\delta q_i = 0$ ($i=1\dots n$), $\delta t = \varepsilon$, correspondente a translações no tempo, teríamos:

$$L \cdot \varepsilon = \text{constante}, L = \text{constante} \text{ ou } \frac{dL}{dt} = 0$$

o que leva à conservação da hamiltoniana ou da energia (capítulo 4, p. 20)

Portanto, a invariância de L a:

(i) translação do sistema no espaço, (ii) rotação do sistema no espaço, (iii) translação do sistema no tempo.

Corresponderá respectivamente a:

(i) conservação do momentum linear, (ii) conservação do momentum angular, (iii) conservação da energia.

Essa correspondência é estabelecida através do teorema de Nöether.

Bibliografia e referências

XXX

XXX

Problemas (capítulo 5 e 6)

17) O problema da braquistócrona

Encontrar a curva unindo os dois pontos, ao longo do qual uma partícula caindo do repouso sob a influência da gravidade viaja do ponto superior (1) ao inferior (2) no menor tempo possível. Esse problema corresponde a encontrar o mínimo da integral

$$t_{12} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

onde v é a velocidade ao longo da curva. Assume-se aqui o princípio da conservação da energia.

18) Mostrar que se a função f de (5.1) é da forma $f(x,y,y')$, as equações de Euler correspondentes serão:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

19) Dada a lagrangeana para o campo eletromagnético

$$L = \int \mathcal{L} dv \quad \text{onde } \mathcal{L} = \text{densidade lagrangeana} = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}}{c} - \rho\varphi$$

$$\mathbf{E} = \text{campo elétrico} = - \left(\nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad \rho = \text{densidade de carga}$$

$$\mathbf{H} = \text{campo magnético} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \mathbf{j} = \text{densidade de corrente}$$

Mostrar que impondo pode-se obter as equações de Maxwell

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}$$

(Aqui considera-se os potenciais φ e \mathbf{A} como as coordenadas q_i e os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} como os \dot{q}_i).

20) Dada a lagrangeana eletromagnética para uma partícula livre:

$$L = \frac{mv^2}{2} + q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

onde φ = potencial escalar e \mathbf{A} = potencial vetor, provar que:

(a) as componentes do momento \mathbf{p} serão:

$$p_i = mv_i + \frac{q}{c} \mathbf{A}_i \quad i=x,y,z$$

(b) as hamiltoniana correspondente será:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi$$

21) Provar que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

22) Problema isoperimétrico

Encontrar a equação diferencial (equação de Euler) que a função $y(x)$ deve satisfazer para que ela torne a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y') dx$$

um extremo e também satisfaça a condição

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')dx = \text{constante}$$

As funções variadas $\bar{y}(x)$ são coterminais com as $y(x)$. O problema será resolvido tomando-se a variação de

$$k = \int_{x_1}^{x_2} h(x,y,y')dx$$

onde $h = f + \partial g$, sendo ∂ um parâmetro chamado multiplicador de Lagrange.

23) Como ilustração do problema anterior consideremos a densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + V(x,y,z) \psi^* \psi$$

onde $\psi(x,y,z)$ é uma função complexa, ψ^* seu conjugado e V é real. Mostrar que a extremização de

$$J = \int \mathcal{L} dx dy dz$$

com a condição

$$J = \int \psi^* \psi dx dy dz = 1$$

e considerando $\partial = -E$ (energia total), conduz à equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi$$

obs: $\psi = \psi_R + \psi_I$ $\psi_R = \text{parte real de } \psi$
 $\psi^* = \psi_R - \psi_I$ $\psi_I = \text{parte imaginária de } \psi$

24) Quando duas bolas de bilhar colidem, as forças instantâneas entre elas são bastante grandes, mas agem somente num tempo infinitesimal Δt , de tal maneira que a quantidade

$$\int_{\Delta t} F dt$$

permanece finita. Tais forças são chamadas forças impulsivas e a integral acima é chamada impulso da força. Mostrar que se forças impulsivas estão presentes as equações de Lagrange podem ser transformadas em:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_i = S_j$$

onde i e f denotam o estado do sistema antes e depois o impulso S_j é o impulso da força generalizada correspondente e q_i e L a lagrangeana incluindo as forças não impulsivas.

25) Invariância das equações de Lagrange a transformações arbitrárias de coordenadas.

Sejam $q_1 \dots q_n$ um conjunto de coordenadas generalizadas para um sistema de n graus de liberdade, com uma lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$. Suponhamos que elas sejam transformadas para outro grupo de coordenadas generalizadas independentes por meio da transformação

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t) \quad i = 1 \dots n$$

chamadas transformações de ponto. Mostrar que se a lagrangeana é expressa como função de s, \dot{s}, t através das equações de transformação então $L(s, \dot{s}, t)$ satisfaz as equações de Lagrange (conservativa) como $L(q, \dot{q}, t)$, ou seja $L(s, \dot{s}, t)$ obedece a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$

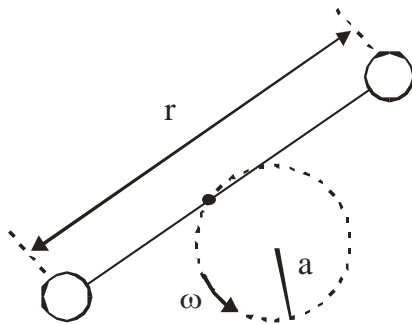
Em outras palavras a forma das equações de Lagrange é invariante às transformações de ponto.

26) Um corpo abandonada de uma altura de 19,62 metros atinge o solo em 2 segundos. A equação para a distância da queda S durante um tempo t poderia ter uma das seguintes formas:

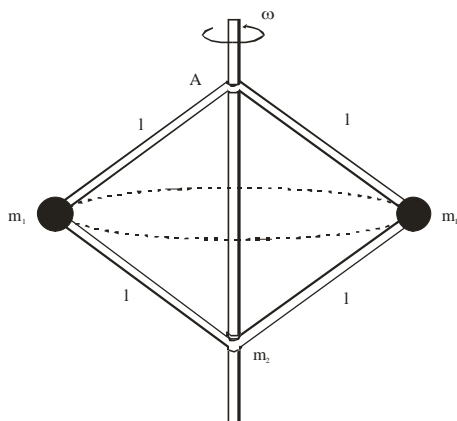
$$s = gt \quad s = \frac{1}{2}gt^2 \quad s = \frac{1}{4}gt^3$$

pois todas elas fornecem $s = 19,62\text{m}$ para $t = 2\text{s}$. Utilizando o princípio de Hamilton demonstre qual é a equação correta.

27) Dois pontos de massa m estão unidos por uma barra rígida e sem peso, o centro do qual é forçado a se mover num círculo de raio a . Obter as equações de movimento.



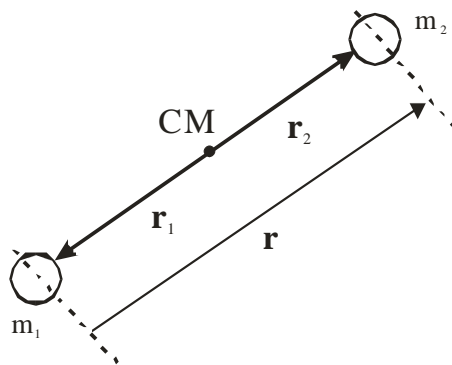
28) Resolver pelo método de Lagrange e Hamilton:



m_2 pode se deslocar verticalmente
 $A =$ ponto fixo
 O conjunto todo gira com velocidade angular ω

29) Forças centrais: o problema de dois corpos.

Consideremos um sistema isolado constituído de duas massas m_1 e m_2 à distância r uma da outra, sendo $V(r)$ o potencial de interação:



(a) mostrar que a lagrangeana do sistema é

$$L = \frac{1}{2} u \dot{r}^2 - V(r) \quad \text{onde } u = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ é a massa reduzida}$$

(b) que tipo de simetria tem a lagrangeana acima e que conseqüências isso traz? Escreva a lagrangeana (a) em coordenadas polares r e θ .

(c) existe conservação dos momentos lineares e angulares e da energia?

(d) obtenha as integrais que permitem calcular $r(t)$ e $\theta(t)$.

30) Obtenha a hamiltoniana para o problema anterior em coordenadas polares.

31) Mostrar que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = 0$$

para $F = F(q,p,t)$ e com $\delta q|_{t_1}^{t_2} = \delta p|_{t_1}^{t_2} = \delta t = 0$

7 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E O MÉTODO DE HAMILTON-JACOBI

7.1 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

As transformações que levam de um conjunto de coordenadas q_i para outro Q_i são chamadas de transformações de ponto e dadas por expressões do tipo:

$$(7.1) \quad Q_i = Q_i(q_1 \dots q_n, t)$$

Nós provamos no capítulo anterior (exercício 25) que as equações de Lagrange são invariantes a tais transformações. Para o desenvolvimento posterior da mecânica é interessante, como veremos adiante, descobrir as transformações que deixam as equações de Hamilton invariantes, as quais são denominadas de transformações canônicas.

Como na formulação hamiltoniana as coordenadas e os momentos generalizadas são tratados independentemente uns dos outros, essas novas transformações devem ser como as que seguem:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t) \\ P_i &= P_i(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t) \end{aligned}$$

Devemos observar que enquanto (7.1) é definida no espaço das configurações, (7.2) pertence ao espaço das fases.

As equações de Hamilton, entretanto, não conservam sua forma para todas as transformações do tipo (7.2), mas àquelas para as quais existe uma função $k(Q,P,t)$, tal que:

$$(7.3) \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad e \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

isto é, para as quais k é a nova hamiltoniana.

As transformações canônicas são geradas por uma função misturada das novas e velhas coordenadas e momentos designada pela letra F (usualmente) e chamada função geratriz, o que pode ser mostrado através do seguinte:

O princípio de Hamilton modificado deve valer para as duas classes de coordenadas, ou seja:

$$(74) \quad \delta \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q,p,t)) dt = 0 \quad e$$

$$(75) \quad \delta \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q,P,t)) dt = 0$$

A validade simultânea entre as duas expressões acima indica que a relação entre os seus integrandos deve ser do tipo:

$$(7.6) \quad \sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

onde F é a função geratriz. (ver problema 16, pagina 34, capítulo 5), sendo que o termo $\frac{dF}{dt}$ integrado tem variação nula. Para ver como F permite encontrar as transformações (7.2) temos que entender o que são as transformações de Legendre.

7.2 – TRANSFORMAÇÕES DE LEGENDRE

As transformações de Legendre fornecem expressões gerais para se passar de um grupo de coordenadas a outro. Vamos considerar três casos:

1^o) mudança de base (x,y) para a base (u,y), tal que

$$(7.7a) \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad e$$

$$(7.7b) \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

com $f = f(x,y)$, qualquer.

Seja g outra função definida por:

$$(7.8) \quad g(u,y) = f(x,y) - ux$$

Diferenciando ambos os lados da expressão acima:

$$(7.9a) \quad dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy \quad e$$

$$(7.9b) \quad \begin{aligned} dg &= udx + vdy - udx - xdu \quad \text{ou} \\ dg &= vdy - xdu \end{aligned}$$

de onde se obtém:

$$(7.10a) \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad e$$

$$(7.10b) \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

2^a) mudança da base (x,y) para (x,v)

Teríamos:

$$(7.11) \quad h(x,v) = f(x,y) - vy$$

Diferenciando:

$$(7.12a) \quad dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial v} dv \quad e$$

$$(7.12b) \quad \begin{aligned} dh &= u dx + v dy - v dy - y dv \quad \text{ou} \\ dh &= u dx - y dv \end{aligned}$$

Portanto:

$$(7.13a) \quad u = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad e$$

$$(7.13b) \quad y = -\frac{\partial h}{\partial v}$$

3ª) mudança da base (x,y) para (u,v)

Essa mudança seria feita através de suas transformações de Legendre:

a) da base (x,y) para (u,y) através da função $g = f - ux$

b) da base (u,y) para (u,v) através da função:

$$(7.14) \quad h'(u,v) = g(u,y) - vy = f(x,y) - ux - vy$$

7.3 – FUNÇÃO GERATRIZ

A função geratriz em (7.6) poderia ter uma das quatro formas abaixo:

$$(7.15a) \quad F_1(q,Q,t)$$

$$(7.15b) \quad F_2(q,P,t)$$

$$(7.15c) \quad F_3(Q,p,t)$$

$$(7.15d) \quad F_4(p,P,t)$$

Vamos ver como cada uma delas gera uma determinada transformação canônica.

a) $F_1(q,Q,t)$

de (7.6) obtemos:

$$(7.16) \quad \frac{dF_1}{dt} = \sum p_i \dot{q}_i - \sum P_i \dot{Q}_i + K - H \quad \text{e de (7.15a):}$$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

de onde se obtém a transformação

$$(7.17a) \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, Q, t)$$

$$(7.17b) \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}(q, Q, t)$$

e a hamiltoniana:

$$(7.18) \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Da inversão de (7.16a) obtemos os $Q_i(q, p, t)$, que substituídos em (7.17b) fornecem a outra parte das equações de transformação (7.2). Para completar (7.17) fornece a nova hamiltoniana.

$$b) \quad F_2(q, P, t)$$

Essa função pode ser obtida de $F_1(q, Q, t)$ através de uma transformação de Legendre. Da semelhança de $f(x, y)$ com $F_1(q, Q, t)$ e $h(x, v)$ com $F_2(q, P, t)$ e identificando (7.7b), obtemos:

$$(7.19) \quad F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i Q_i P_i$$

de onde se obtém:

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{dF_1}{dt} + \sum_i \dot{Q}_i P_i + \sum_i Q_i \dot{P}_i$$

de (7.16):

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum p_i \dot{q}_i - \sum \cancel{P_i \dot{Q}_i} + K - H + \sum_i \dot{Q}_i \cancel{P_i} + \sum_i Q_i \dot{P}_i$$

e por comparação obtemos:

$$(7.20a) \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

$$(7.20b) \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$(7.21) \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Como no caso anterior (7.20 a e b) fornecem as equações de transformações e (7.21) a nova hamiltoniana.

Pelo mesmo procedimento usado para F_1 e F_2 , as transformações canônicas e a hamiltoniana k são obtidas das funções geratriz F_3 e F_4 . Para esses dois casos nós não vamos fazer as deduções que será deixada como exercício. Somente as equações finais serão dadas.

c) $F_3(Q,p,t)$

Através de uma transformação de Legendre obtém-se:

$$(7.3) \quad F_3(Q,p,t) = F_1(q,Q,t) - \sum p_i q_i$$

e as equações

$$(7.23a) \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$$

$$(7.23b) \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$(7.24) \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

d) $F_4(p,P,t)$ é obtida por uma transformação de Legendre dupla:

$$(7.25) \quad F_4(p,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum P_i Q_i - \sum p_i q_i$$

de onde se obtém:

$$(7.26a) \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$

$$(7.26b) \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

$$(7.27) \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

7.4 – INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE HAMILTON. MÉTODO DE HAMILTON-JACOBI

As transformações canônicas permite-nos encontrar procedimentos gerais para a integração das equações de movimento, dadas sob a forma das equações de Hamilton. Há duas maneiras:

1ª) Suponhamos que seja possível encontrar uma transformação canônica

$$(7.2) \quad \begin{aligned} Q_i &= Q_i(q,p,t) \\ P_i &= P_i(q,p,t) \end{aligned}$$

tal que todas as novas coordenadas Q_i sejam cíclicas na nova hamiltoniana $K = K(P,t)$. Das equações de Hamilton:

$$(7.28) \quad \begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{ou} \\ P_i &= b_i = \text{constante} \end{aligned}$$

A outra equação de Hamilton fornecerá:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial K(b_i,t)}{\partial b_i} = f(b_i,t)$$

e portanto:

$$(7.29) \quad \dot{Q}_i = \int f(b_i,t)dt + a_i = g(b_i,t) + a_i$$

onde a_i = constante de integração.

Substituindo os Q_i e P_i dados por (7.29) e (7.28) nas equações de transformação (7.2), obtemos por inversão as soluções do problema:

$$(7.30) \quad q_i = q_i(a_i, b_i, t) = q_i(t)$$

2ª) Um outro procedimento foi descoberto por Jacobi e Hamilton. Consiste em encontrar uma transformação canônica que torne a nova hamiltoniana K identicamente nula. As novas coordenadas e momenta seriam constantes, o que pode ser mostrado das equações da Hamilton:

$$(7.31a) \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad (7.31b) \quad Q_i = A_i = \text{constante}$$

$$(7.32a) \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad (7.32b) \quad P_i = B_i = \text{constante}$$

Por outro lado as hamiltonias H e K estão relacionadas por

$$(7.33) \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

e como $K \equiv 0$ nesse caso, resulta que:

$$(7.34) \quad H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Consideremos que a função geratriz F é dada por $F = F_2(q,P,t)$. Portanto de (7.20a);

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

$$(7.35) \quad \boxed{H(q_1 \dots q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \dots \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

que é uma equação diferencial parcial para a função F_2 e chamada equação de Hamilton-Jacobi. A solução dessa equação é indicada por S e chamada de função principal de Hamilton. Como $F_2 = F_2(q,P,t)$ e $P_i = B_i$, a equação (7.35) é função dos nq_i e do tempo e tem portanto $n+1$ constantes de integração. Como as derivadas de S é que aparecem na equação e não S propriamente, uma das constantes deve ser uma constante aditiva. As outras n vamos tomá-las, devido à sua arbitrariedade como os novos momenta P_i , de modo que S deve ser da forma:

$$(7.36) \quad S(q,B,t) = S(q_1 \dots q_n, B_1 \dots B_n, t)$$

As soluções $q(t)$ do problema são obtidas por inversão das equações (7.20b) com $F_2 = S$ e levando em conta (7.31b) e (7.32b):

$$(7.37) \quad Q_i = \frac{\partial S(q_i, B_i, t)}{\partial B_i} = A_i$$

e portanto:

$$(7.38) \quad q_i = q_i(A_i, B_i, t) = q_i(t)$$

Um caso particular importante ocorre quando H não é função explícita do tempo, ou seja:

$$(7.39) \quad H = E = \text{energia} = \text{constante}$$

A equação de Hamilton-Jacobi fica:

$$(7.40) \quad H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

e S pode ser posta na forma:

$$(7.41) \quad S(q,B,t) = W(q,B) + f(t)$$

sendo W a função característica de Hamilton.

Substituindo em (7.40) obtemos:

$$(7.42) \quad H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = -\dot{f} = E$$

e portanto:

$$(7.43) \quad f(t) = -Et + \text{constante}$$

de onde encontra-se que:

$$(7.44) \quad S(q,B,t) = W(q,B) - Et$$

De (7.42) também se obtém:

$$(7.45) \quad H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo. Essa equação tem n constante de integração as quais são tomadas como os momenta $P_i = B_i$. Uma dessas constantes é a própria hamiltoniana, a qual podemos identificar como a constante B_1 . Então, de (7.37) e (7.44):

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial B_1} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = A_1 \quad \text{ou}$$

$$(7.46a) \quad \frac{\partial W}{\partial E}(q_i, B_i) = A_1 + t \quad \text{e}$$

$$(7.46b) \quad \frac{\partial W}{\partial B_i}(q_i, B_i) = A_i \quad i \neq 1$$

as quais por inversão fornecem as soluções do problema.

Em resumo, a solução do problema mecânico pelo método de Hamilton-Jacobi deve obedecer à seqüência:

1º) encontrar a hamiltoniana H do problema.

2º) escrever a equação de Hamilton-Jacobi (7.35) ou (7.45) e encontrar as soluções S ou W.

3º) por inversão de (7.37) ou (7.46a,b) obter os $q_i(t)$ procurados.

Bibliografia

Exercícios e Problemas

32) Mostrar que para todas as funções geratrizes analisadas na seção 7.3, $\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = 0$

se as variações de q , p , Q e P são nulas nos pontos terminais.

33) Provar as relações (7.23a,b), (7.29), (7.26a,b) e (7.27)

34) Encontrar as transformações canônicas geradas pelas seguintes funções geratrizes:

$$(a) F_2 = \sum_i q_i p_i$$

$$(b) F_2 = f_i(q_1 \dots q_n) P_i$$

$$(c) F_1 = \sum_i q_i Q_i$$

35) Mostre diretamente que as transformações abaixo são canônicas:

$$a) Q = \log \left(\frac{1}{q} \operatorname{sen}(p) \right) \quad p = q \operatorname{cotg} P$$

$$b) Q = \operatorname{arctg} \frac{\alpha q}{p} \quad P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right) \quad \alpha = \text{constante}$$

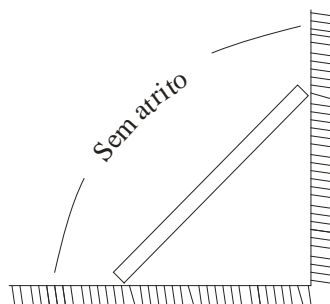
36) Resolver o problema da queda livre pelo método de Hamilton-Jacobi.

37) Resolver o problema do oscilador harmônico unidimensional pelo método de Hamilton-Jacobi.

38) Resolver o problema do movimento de uma partícula sob ação de uma força central pelo método de Hamilton-Jacobi.

39) A lagrangeana para uma partícula relativística é $L = -m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - V$ onde $m_0 =$ massa de repouso e v sua velocidade. Resolva o problema pelo método de Hamilton-Jacobi.

40) Uma barra de comprimento $2l$ e massa m se apóia sobre superfícies lisas como mostra a figura. Suponha que a barra é forçada a se mover pela ação da gravidade se mantendo sempre em contato com as superfícies. Reduza o problema a quadraturas pelo método de Hamilton-Jacobi.



8 – COLCHETES DE POISSON E TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS INFINITESIMAIS

Além das equações de Hamilton há outras expressões que são invariantes às transformações canônicas, como certas integrais encontradas por Poincaré. Consideremos por exemplo o elemento de volume $d\Gamma$ no espaço das fases dado por:

$$(8.1) \quad d\Gamma = dq_1 \dots dq_n, dp_1 \dots dp_n = d\Gamma(q,p)$$

Pode-se mostrar que a integral:

$$(8.2) \quad J_1 = \int d\Gamma$$

é invariante as transformações canônicas, no sentido que:

$$(8.3) \quad \int d\Gamma(q,p) = \int d\Gamma(Q,P)$$

(para a prova da equação acima ver Goldstein página 247 ou Landau e Lifchitz página 207). Em outras palavras (8.3) significa que os volumes das regiões correspondentes a (q,p) e (Q,P) são os mesmos.

Outra expressão invariante de particular importância em mecânica são os colchetes de Poisson, dos quais trataremos a seguir.

8.1 – COLCHETES DE POISSON

Sejam u e v duas funções quaisquer definidas no espaço das fases. O Colchetes de Poisson de u e v é definido por:

$$(8.4) \quad [u,v]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right)$$

Tais Colchetes têm a seguinte propriedade:

$$(8.5) \quad [u,v]_{q,p} = -[v,u]_{q,p}$$

Pode-se mostrar também que:

$$(8.6) \quad [p_i, p_j] = 0$$

$$(8.7) \quad [q_i, q_j] = 0$$

$$(8.8) \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

que é chamado Colchete Fundamental de Poisson, sendo que $\delta_{ij} = 0$, para $i \neq j$ e 1 para $i = j$.

Vamos mostrar agora que os Colchetes de Poisson são realmente invariantes às transformações canônicas, ou seja:

$$(8.9) \quad [F, G]_{q,p} = [F, G]_{Q,P}$$

onde F e G são duas funções quaisquer.

Supondo q e p como função do Q e P, teremos:

$$\begin{aligned} [F, G]_{q,p} &= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) = \\ &= \sum_{j,k} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right] = \\ &= \sum_{j,k} \left[\frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial G}{\partial P_k} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) \right] = \\ (8.10) \quad [F, G]_{q,p} &= \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} [F, Q_k]_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_k} [F, P_k]_{q,p} \right) \end{aligned}$$

Podemos usar essa mesma expressão para avaliar os Colchetes dentro dos parênteses. Fazendo $F = Q_k$ e $G = F$ em (8.10) obtemos:

$$[Q_k, F]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} [Q_k, Q_j] + \frac{\partial F}{\partial P_j} [Q_k, P_j] \right)$$

que por (8.7) e (8.8) se reduz a:

$$\sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial P_j} \delta_{jk} \right) \quad \text{ou}$$

$$(8.11) \quad [Q_k, F]_{q,p} = \frac{\partial F}{\partial P_k}$$

Analogamente fazendo $F = P_k$ e $G = F$ obtemos:

$$(8.12) \quad [P_k, F]_{q,p} = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}$$

Inserindo esses dois resultados em (8.10) e usando (8.5), obtemos:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_k} + \frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial F}{\partial P_k} \right) = [F, G]_{Q,P}$$

o que prova (8.9).

8.2 – COLCHETES DE POISSON E EQUAÇÕES DE HAMILTON

Fazendo $F = H$ e usando as coordenadas q, p em (8.11) e (8.12), tem-se que:

$$(8.13a) [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$(8.13b) [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

que são as equações de Hamilton. Elas, na verdade, são casos especiais da derivação total em relação ao tempo de uma função $u(q, p, t)$, pois:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{ou} \\ \frac{du}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial f_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial f_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

e portanto:

$$(8.14) \frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Se u não é função explícita do tempo, obtemos:

$$(8.15) \frac{du}{dt} = [u, H]$$

Simplemente, o que mostra que se u é constante de movimento o colchete de Poisson de u e H será nulo, o que pode servir de teste para identificar as constantes do sistema.

8.3 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS INFINITESIMAIS

As transformações canônicas infinitesimais são aquelas em que as novas coordenadas e momentos diferem dos anteriores somente por infinitesimais. Podem ser escritas sob a forma:

$$(8.16a) Q_i = q_i + \delta q_i$$

$$(8.16b) P_i = p_i + \delta p_i$$

onde os δq_i e δp_i são variações infinitesimais reais, como pequenos deslocamentos e rotações.

A função geratriz da transformação (8.16) deverá ser semelhante à função geratriz que gera a transformação identidade (ver exercício 34 página 59), diferindo dela por uma quantidade infinitesimal:

$$(8.17) \quad F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P)$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal.

Da equação (7.20a):

$$\text{ou seja, } p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$(8.18) \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Analogamente, de (7.20b):

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

Mas como:

$$(8.19) \quad \frac{\partial G}{\partial P_i} = \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

para termos em 1ª ordem em ε , obtemos

$$(8.20) \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

sendo G considerado um $G(q, p)$.

Uma aplicação interessante é obtida fazendo $G = H(q, p)$ e $\varepsilon = dt$, isto é, um pequeno deslocamento no tempo. Então de (8.18) e (8.20):

$$(8.21a) \quad \delta q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = \dot{q}_i dt = dq_i$$

$$(8.21b) \quad \delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt = -\dot{p}_i dt = dp_i$$

Essas expressões mostram que o efeito da transformação, gerada por H , foi modificar os valores das coordenadas e momenta de um tempo t para um tempo $t + dt$. Ou seja, o movimento do sistema num tempo dt pode ser descrito como uma transformação canônica gerada pela Hamiltoniana. O movimento do sistema desde t_0 até t poderia da mesma maneira ser pensado como a sucessão de infinitas transformações canônicas infinitesimais, ou de uma única que envolva no tempo, cuja função geratriz é a própria Hamiltoniana do sistema. Em outras palavras a hamiltoniana pode ser entendida como a geratriz do movimento do sistema com o tempo.

Bibliografia e Referências.

xxxx

Exercícios e Problemas

41) Provas as relações (8.5), (8.6), (8.7) e (8.8).

42) Mostrar que:

$$\begin{aligned} [u+v,w] &= [u,w] + [v,w] \\ [u,vw] &= [u,v]w + v[u,w] \end{aligned}$$

onde u , v e w são funções arbitrárias.

43) Provar a identidade de Jacobi: $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ onde x , y e z são três funções.

44) Uma classe de operações é dita ter propriedades de grupo se:

- i – contém o operador identidade.
- ii – o inverso de cada operador é também membro da classe.
- iii – o produto de dois operadores também pertence à classe.

Mostre que as transformações canônicas para um sistema de n graus de liberdade têm as propriedades dos grupos.

45) Demonstre a expressão (8.19).

46) (a) Prove que o Colchete de Poisson de duas constantes de movimento é também uma constante de movimento.

(b) Mostre que se a hamiltoniana e uma quantidade F são constantes de movimento então a n -ésima derivada parcial de F em relação ao tempo também deve ser uma constante de movimento.

(c) Como ilustração desse resultado, considere o movimento uniforme de uma partícula livre de massa m . A Hamiltoniana é certamente conservada e existe uma constante

de movimento $F = x - \frac{pt}{m}$. Mostre que $[H,F] = 0$ e $\left[H, \frac{\partial F}{\partial t} \right] = 0$

47) Consideremos uma transformação canônica infinitesimal que produz uma rotação no sistema como um todo de um ângulo $d\theta$ ao longo do eixo-Z. Para 1ª ordem em $d\theta$ essa transformação seria indicada por:

$$X_i = x_i - y_i d\theta$$

$$Y_i = y_i - x_i d\theta$$

$$Z_i = z_i$$

Encontre a função geratriz. Qual o seu significado físico?

9 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bliss, G.A. (1925) – “Calculus of Variations” – Carus Mathematical Monographs – Vol.1 (Open Court Publis. Co. – La Salle Jllinois)
- Courant e Hilbert (1953) – “Methods of Mathematical Physics” – (Juterscience – N.Y.)
- Gillespie, R.P. – “Partial Differentiation” (Oliver and Boyd-Edinguih – 1951)
- Goldstein – “Classical Mechenics”
- H. Hertz. “The Principles of Mechanics” (1894 – Dover, N.Y., 1956)
- J. L. Martin – “Generalized Dynamics and the classical analogie of a Fermi oscillator” Proc. Roy. Soc. (London) A 251 , 536 (1959)
- Lanczos, C – “The Variational Principles of Mechanics”
- Lindsay e Margenan – “Foundations of Physics”
- M. Bunge. (1957) – “Lagrangian Formulation and Mechanical Interpretation”. Am. Joun. Phys 25,4, 211-218
- M. Bunge. (1967) – “Foudations of Physics”. (Springer – Verlag – Berlim, N.York)
- M. Bunge. (1973) “Filosofia da Física” tradução portuguesa (edições 70, Lisboa).